Matemática

Unicamp

ETAPA

QUESTÃO 1

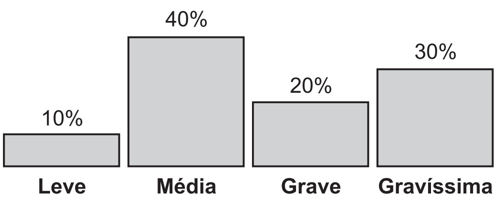
O Código de Trânsito Brasileiro classifica as infrações, de acordo com a sua natureza, em leves, médias, graves e gravíssimas. A cada tipo corresponde uma pontuação e uma multa em reais, conforme a tabela abaixo.

Infração	Pontuação	Multa*
Leve	3 pontos	R$ 53,00
Média	4 pontos	R$ 86,00
Grave	5 pontos	R$ 128,00
Gravíssima	7 pontos	R$ 192,00

*Valores arredondados

a) Um condutor acumulou 13 pontos em infrações. Determine todas as possibilidades quanto à quantidade e à natureza das infrações cometidas por esse condutor.

b) O gráfico de barras abaixo exibe a distribuição de 1.000 infrações cometidas em certa cidade, conforme a sua natureza. Determine a soma das multas aplicadas.



Resposta

a) Vamos considerar primeiro as infrações com maior pontuação:

- *Se a infração com maior pontuação for gravíssima, restam 13 – 7 = 6 pontos, que só podem ser de duas infrações leves, logo 13 = 7 + 3 + 3.*
- *Se a infração com maior pontuação for grave, restam 13 – 5 = 8 pontos, que podem ser de duas médias, ou de uma grave e uma leve. As possibilidades são 13 = 5 + 4 + 4 = = 5 + 5 + 3.*
- *Se a infração com maior pontução for média, restam 13 – 4 = 9 pontos, que só podem ser de três leves, logo 13 = 4 + 3 + 3 + 3.*
- *Se a infração com maior pontuação for leve, a pontuação será um múltiplo de 3. Como 13 não é múltiplo de 3, não há possibilidade de somar 13.*

b) A soma das multas aplicadas é:

$0{,}1 \cdot 1\,000 \cdot 53 + 0{,}4 \cdot 1\,000 \cdot 86 +$
$+ 0{,}2 \cdot 1\,000 \cdot 128 + 0{,}3 \cdot 1\,000 \cdot 192 =$
$= 122\,900$ *reais.*

QUESTÃO 2

Seja a um número real positivo e considere as funções afins $f(x) = ax + 3a$ e $g(x) = 9 - 2x$, definidas para todo número real x.

a) Encontre o número de soluções inteiras da inequação $f(x)g(x) > 0$.

b) Encontre o valor de a tal que $f(g(x)) = = g(f(x))$ para todo número real x.

Resposta

a) Sendo $a > 0$, *temos* $f(x) \cdot g(x) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(x + 3)(9 - 2x) > 0 \Leftrightarrow -3 < x < \dfrac{9}{2}$. *Assim, são 7 soluções inteiras da inequação, a saber:* $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ *e* 4.

b) Para $x \in R$, *temos* $f(g(x)) = g(f(x)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(9 - 2x) + 3a = 9 - 2(ax + 3a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12a - 2ax = 9 - 2ax - 6a \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

QUESTÃO 3

Considere a função $f(x) = 10^{1+x} + 10^{1-x}$, definida para todo número real x.

a) Mostre que $f(\log_{10}(2 + \sqrt{3}))$ é um número inteiro.

b) Sabendo que $\log_{10} 2 \approx 0.3$, encontre os valores de x para os quais $f(x) = 52$.

Resposta

Sendo $f(x) = 10^{1+x} + 10^{1-x} = 10 \cdot 10^x + \dfrac{10}{10^x}$, temos:

a) $f(\log_{10}(2+\sqrt{3})) = 10 \cdot 10^{\log_{10}(2+\sqrt{3})} +$

$+ \dfrac{10}{10^{\log_{10}(2+\sqrt{3})}} = 10 \cdot (2+\sqrt{3}) + \dfrac{10}{2+\sqrt{3}} =$

$= 20 + 10\sqrt{3} + \dfrac{10(2-\sqrt{3})}{2^2 - \sqrt{3}^2} =$

$= 20 + 10\sqrt{3} + 20 - 10\sqrt{3} = 40$. Assim, $f(\log_{10}(2+\sqrt{3})) \in Z$.

b) $f(x) = 52 \Leftrightarrow 10 \cdot 10^x + \dfrac{10}{10^x} = 52 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 10^x = t \\ 10t + \dfrac{10}{t} - 52 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 10^x = t \\ 10t^2 - 52t + 10 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 10^x = t \\ \left(t = 5 \text{ ou } t = \dfrac{1}{5}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 10^x = 5 \\ \text{ou} \\ 10^x = \dfrac{1}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = \log_{10} 5 \\ \text{ou} \\ x = \log_{10} \dfrac{1}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \\ \text{ou} \\ x = \log_{10} 2 - \log_{10} 10 \end{array}\right. \quad (*)$$

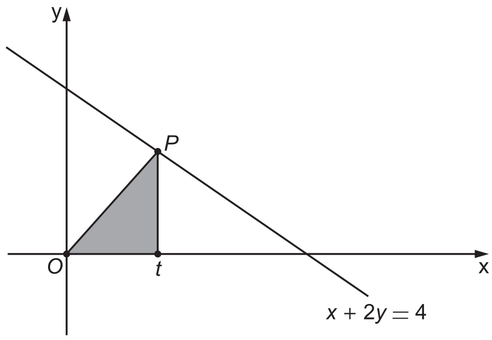
Usando $\log_{10} 2 \cong 0{,}3$, temos $(*) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x \cong 1 - 0{,}3 \\ \text{ou} \\ x \cong 0{,}3 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x \cong 0{,}7 \\ \text{ou} \\ x \cong -0{,}7 \end{array}\right. .$$

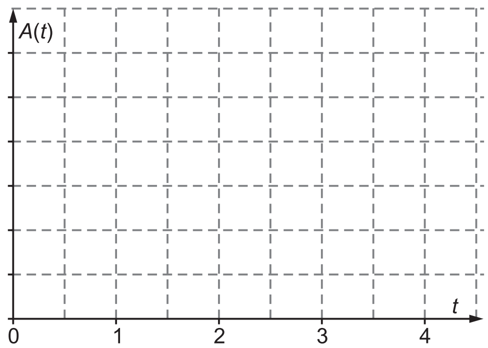
Assim, os valores de x que satisfazem $f(x) = 52$ são, aproximadamente, 0,7 e −0,7.

QUESTÃO 4

Seja r a reta de equação cartesiana $x + 2y = 4$. Para cada número real t tal que $0 < t < 4$, considere o triângulo T de vértices em $(0; 0)$, $(t; 0)$ e no ponto P de abscissa $x = t$ pertencente à reta r, como mostra a figura abaixo.



a) Para $0 < t < 4$, encontre a expressão para a função $A(t)$, definida pela área do triângulo T, e esboce o seu gráfico.

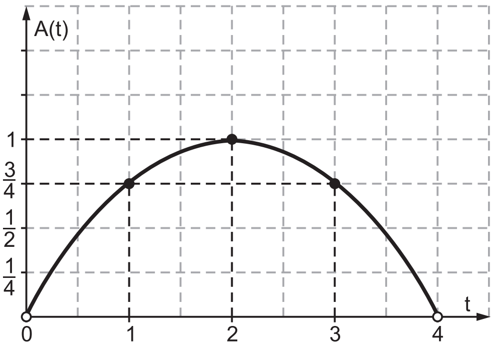


b) Seja k um número real não nulo e considere a função $g(x) = k/x$, definida para todo número real x não nulo. Determine o valor de k para o qual o gráfico da função g tem somente um ponto em comum com a reta r.

Resposta

a) Sendo r dada por $x + 2y = 4 \Leftrightarrow y = 2 - \dfrac{x}{2}$, temos $P = \left(t;\ 2 - \dfrac{t}{2}\right)$.

Assim, a área A(t) do triângulo T, de catetos t e $2 - \dfrac{t}{2}$, é $\dfrac{1}{2} \cdot t \cdot \left(2 - \dfrac{t}{2}\right) = \dfrac{t(4-t)}{4}$, cujo gráfico é:



b) A reta r e o gráfico de g têm somente um ponto em comum se, e somente se, o sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ y = \dfrac{k}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \cdot \dfrac{k}{x} = 4 \\ y = \dfrac{k}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2k = 0 \ \ (*) \\ y = \dfrac{k}{x} \end{cases}$$

tem solução única. Como $k \neq 0$ *e* $x^2 - 4x + 2k = 0 \Rightarrow x \neq 0$*, o sistema tem solução única se, e somente se, o discriminante de (*) é nulo, ou seja,* $\Delta = 0 \Leftrightarrow (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2k = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

QUESTÃO 5

Seja (a, b, c, d) uma progressão geométrica (PG) de números reais, com razão $q \neq 0$ e $a \neq 0$.

a) Mostre que $x = -1/q$ é uma raiz do polinômio cúbico $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

b) Sejam e e f números reais quaisquer e considere o sistema linear nas variáveis x e y, $\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. Determine para que valores da razão q esse sistema tem solução única.

Resposta

Como (a, b, c, d) é uma PG de razão $q \neq 0$,

$b = a \cdot q \Leftrightarrow a = \dfrac{b}{q}$, $c = a \cdot q^2 \Leftrightarrow a = \dfrac{c}{q^2}$ e

$d = a \cdot q^3 \Leftrightarrow a = \dfrac{d}{q^3}$.

a) Como $p\left(-\dfrac{1}{q}\right) = a - \dfrac{b}{q} + \dfrac{c}{q^2} - \dfrac{d}{q^3} =$

$= a - a + a - a = 0$, $-\dfrac{1}{q}$ *é raiz de p.*

b) Para que $\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$ *admita solução única, devemos ter:*

$$\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow ab - cd \neq 0 \Leftrightarrow$$

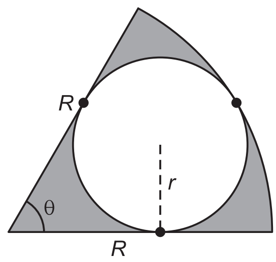
$$\Leftrightarrow a \cdot a \cdot q - a \cdot q^2 \cdot a \cdot q^3 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 \cdot q \cdot (1 - q^4) \neq 0$$

Como $a \neq 0$ *e* $q \neq 0$*, basta termos* $1 - q^4 \neq 0 \Leftrightarrow (q \neq 1 \text{ e } q \neq -1)$.

QUESTÃO 6

A figura abaixo exibe um círculo de raio r que tangencia internamente um setor circular de raio R e ângulo central θ.

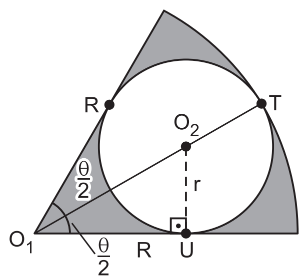


a) Para $\theta = 60^\circ$, determine a razão entre as áreas do círculo e do setor circular.

b) Determine o valor de $\cos\theta$ no caso em que $R = 4r$.

Resposta

Os centros O_1 *do setor circular e* O_2 *do círculo e o ponto de tangência T entre o arco e o círculo são colineares.*



Além disso, sendo U o ponto de tangência do círculo em um dos raios do setor circular, no triângulo retângulo O_1O_2U, temos

$O_2U = r$, $O_1O_2 = O_1T - O_2T = R - r$ e $m(O_2\hat{O}_1U) = \frac{\theta}{2}$. Logo $\text{sen}\,\frac{\theta}{2} = \frac{r}{R - r}$.

a) Para $\theta = 60^o$, $\text{sen}\,\frac{60^o}{2} = \frac{r}{R - r} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{r}{R - r} \Leftrightarrow R = 3r$. A área do setor circular é $\frac{\theta}{360^o} \cdot \pi R^2 = \frac{60^o}{360^o} \cdot \pi (3r)^2 = \frac{3\pi r^2}{2}$,

e a razão pedida é:

$$\frac{\pi r^2}{\frac{3\pi r^2}{2}} = \frac{2}{3}.$$

b) Para $R = 4r$, $\text{sen}\,\frac{\theta}{2} = \frac{r}{4r - r} = \frac{1}{3}$ e $\cos\theta =$

$= 1 - 2\text{sen}^2\,\frac{\theta}{2} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$.