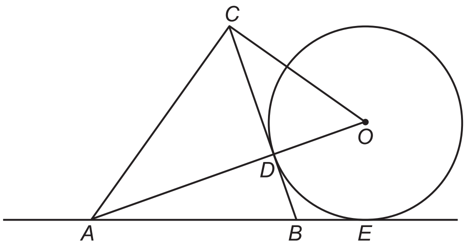
QUESTÃO 1

Na figura a seguir, a circunferência de centro em O e raio r tangencia o lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC no ponto D e tangencia a reta $\overleftrightarrow{AB}$ no ponto E. Os pontos A, D e O são colineares, $AD = 2r$ e o ângulo $\widehat{ACO}$ é reto. Determine, em função de r,



a) a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC;
b) a medida do segmento $\overline{CO}$.

Resposta

Como a circunferência tangencia $\overline{BC}$ *e* $\overleftrightarrow{AB}$, $\overline{OD} \perp \overline{BC}$ *e* $\overline{OE} \perp \overleftrightarrow{AB}$.

a) Sendo $m(D\hat{A}B) = m(E\hat{A}O)$ *(comum) e* $m(A\hat{D}B) = m(A\hat{E}O) = 90^o$, *pelo caso AA os triângulos ADB e AEO são semelhantes. Sendo* $AO = AD + DO = 2r + r = 3r$ *e* $AE = \sqrt{AO^2 - OE^2} = \sqrt{(3r)^2 - r^2} = 2r\sqrt{2}$, *logo*

$$\frac{AB}{AO} = \frac{AD}{AE} \Leftrightarrow AB = \frac{2r \cdot 3r}{2r\sqrt{2}} = \frac{3r\sqrt{2}}{2}.$$

b) Sendo $\overline{CD}$ *altura, pelas relações métricas no triângulo retângulo ACO temos* $CO^2 = DO \cdot AO = r \cdot 3r \Leftrightarrow CO = r\sqrt{3}$.

QUESTÃO 2

Resolva as inequações:

a) $x^3 - x^2 - 6x > 0$;

b) $\log_2 (x^3 - x^2 - 6x) \le 2$.

Resposta

a) $x^3 - x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 6) > 0$

Analisando o quadro de sinais, temos:

		−2	0	3
sinal de x	−	−	+	+
sinal de $x^2 - x - 6$	+	−	−	+
sinal de $x(x^2 - x - 6)$	−	+	−	+

Assim, $V =]-2;\ 0[\ \cup\ ]3;\ +\infty[$.

b) $\log_2 (x^3 - x^2 - 6x) \le 2 \Leftrightarrow \log_2 x(x^2 - x - 6) \le \log_2 4 \Leftrightarrow 0 < x(x^2 - x - 6) \le 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x(x^2 - x - 6) > 0 \\ \quad \wedge \\ x(x^2 - x - 6) \le 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

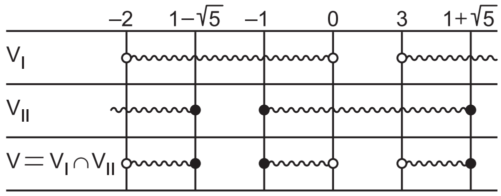
$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x(x^2 - x - 6) > 0 \\ \quad \wedge \\ x^3 - x^2 - 6x - 4 \le 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x(x^2 - x - 6) > 0 \quad (I) \\ \quad \wedge \\ (x + 1)(x^2 - 2x - 4) \le 0 \quad (II) \end{array} \right.$$

Analisando o quadro de sinais da inequação (II), temos:

		$1 - \sqrt{5}$	−1	$1 + \sqrt{5}$
sinal de (x + 1)	−	−	+	+
sinal de $(x^2 - 2x - 4)$	+	−	−	+
sinal de $(x + 1)(x^2 - 2x - 4)$	−	+	−	+

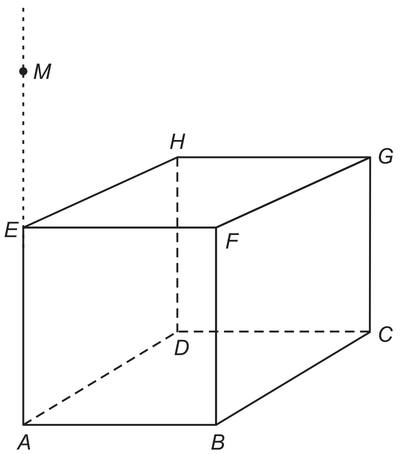
Sendo V_I *e* V_{II} *os conjuntos verdade das inequações I e II, respectivamente, temos que o conjunto verdade (V) da inequação é* $V = V_I \cap V_{II}$, *assim:*



$V =]-2;\ 1 - \sqrt{5}]\ \cup [-1;\ 0[\ \cup\ ]3;\ 1 + \sqrt{5}]$

QUESTÃO 3

No cubo *ABCDEFGH*, representado na figura a seguir, cada aresta tem medida 1. Seja *M* um ponto na semirreta de origem *A* que passa por *E*. Denote por θ o ângulo $B\widehat{M}H$ e por *x* a medida do segmento $\overline{AM}$.



a) Exprima cos θ em função de *x*.
b) Para que valores de *x* o ângulo θ é obtuso?
c) Mostre que, se $x = 4$, então θ mede menos do que 45^o.

Resposta

Temos $ME = x - 1$ *se* $M \in \overrightarrow{AE} - \overline{AE}$ *e* $ME = 1 - x$ *se* $M \in \overline{AE}$, *ou seja,* $ME = |x - 1|$.

a) Pelo Teorema de Pitágoras, nos triângulos ABM e EMH, $BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{1^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + 1}$ *e*

$MH = \sqrt{ME^2 + EH^2} = \sqrt{|x-1|^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$. *Além disso, a diagonal do cubo* $\overline{BH}$ *mede* $\sqrt{3}$.

Logo, pela lei dos cossenos no triângulo BHM, $BH^2 = BM^2 + MH^2 - 2 \cdot BM \cdot MH \cdot \cos\theta \Leftrightarrow 3 = x^2 + 1 + x^2 - 2x + 2 - 2 \cdot \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 2} \cdot \cos\theta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{x^2 - x}{\sqrt{(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)}}.$$

b) O ângulo θ é obtuso se, e somente se, $\cos\theta < 0 \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

c) Para $x = 4$:

$$\cos\theta = \frac{4^2 - 4}{\sqrt{(4^2 + 1)(4^2 - 2 \cdot 4 + 2)}} = \frac{12}{\sqrt{170}} > \frac{12}{\sqrt{288}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^o$$

No intervalo $]0; \pi[$, *a função cos é decrescente, de modo que* $\theta < 45^o$.

QUESTÃO 4

Resolva os três itens abaixo.
a) Calcule $\cos(3\pi/8)$ e $\text{sen}(3\pi/8)$.
b) Dado o número complexo $z = \sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, encontre o menor inteiro $n > 0$ para o qual z^n seja real.
c) Encontre um polinômio de coeficientes inteiros que possua *z* como raiz e que não possua raiz real.

Resposta

a) Como $\frac{\pi}{8}$ *e* $\frac{3\pi}{8}$ *são complementares e lembrando que* $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$, *para* $x = \frac{\pi}{8}$ *temos:*

$$\text{sen}\,\frac{3\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\cos\frac{\pi}{4} + 1}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \text{ e } \cos\frac{3\pi}{8} = \text{sen}\,\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

b) Sendo $z = \sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i \cdot \text{sen}\,\frac{3\pi}{8}\right)$, *pelo Teorema de De Moivre,* $z^n = 2^n\left(\cos\frac{3\pi \cdot n}{8} + i \cdot \text{sen}\,\frac{3\pi \cdot n}{8}\right)$, *que será real se, e somente se,* $\text{sen}\,\frac{3\pi \cdot n}{8} = 0 \Leftrightarrow \frac{3\pi \cdot n}{8} = k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow n = \frac{8k}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$.

Assim, o menor n inteiro positivo é atingido para $k = 3 \Leftrightarrow n = 8$.

c) Como $z^8 = 2^8 \cdot (\cos 3\pi + i \cdot \text{sen } 3\pi) = -256$, o polinômio $x^8 + 256 = 0$, de coeficientes inteiros, possui z como raiz e não possui raízes reais, pois $x^8 + 256 > 0 \ \forall x \in R$.
Obs.: *há outras possibilidades para o polinômio, todos múltiplos de $x^8 + 256$ sem raízes reais.*

QUESTÃO 5

A função f está definida da seguinte maneira: para cada inteiro **ímpar** n,

$$f(x) = \begin{cases} x-(n-1), & \text{se } n-1 \le x \le n \\ n+1-x, & \text{se } n \le x \le n+1 \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de f para $0 \le x \le 6$.
b) Encontre os valores de x, $0 \le x \le 6$, tais que $f(x) = \frac{1}{5}$.

Resposta

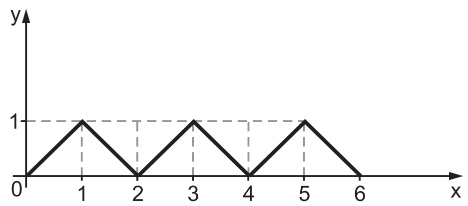
a) Para n ∈ {1, 3, 5, 7, ...}, temos:

$$n = 1,\ f(x) = \begin{cases} x \text{ se } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x \text{ se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$n = 3,\ f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ se } 2 \le x \le 3 \\ 4 - x \text{ se } 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

$$n = 5,\ f(x) = \begin{cases} x - 4 \text{ se } 4 \le x \le 5 \\ 6 - x \text{ se } 5 \le x \le 6 \end{cases}$$

E o gráfico de f é:



b) Para $0 \le x \le 1$, $f(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$.

Se $1 \le x \le 2$, $f(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 2 - x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}$.

Se $2 \le x \le 3$, $f(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x - 2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \frac{11}{5}$.

Se $3 \le x \le 4$, $f(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 4 - x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \frac{19}{5}$.

Se $4 \le x \le 5$, $f(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x - 4 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \frac{21}{5}$.

Se $5 \le x \le 6$, $f(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 6 - x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \frac{29}{5}$.

QUESTÃO 6

Um "alfabeto minimalista" é constituído por apenas dois símbolos, representados por ∗ e #. Uma palavra de comprimento n, $n \ge 1$, é formada por n escolhas sucessivas de um desses dois símbolos. Por exemplo, **#** é uma palavra de comprimento 1 e **#∗∗#** é uma palavra de comprimento 4.
Usando esse alfabeto minimalista,
a) quantas palavras de comprimento menor do que 6 podem ser formadas?
b) qual é o menor valor de N para o qual é possível formar 1.000.000 de palavras de tamanho menor ou igual a N?

Resposta

A quantidade de palavras que se pode formar de comprimento n é igual a 2^n, pois para cada símbolo temos 2 possibilidades de escolha.
a) A quantidade de palavras de tamanho menor que n = 6 é $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62$.
b) Para que a quantidade de palavras de tamanho menor ou igual a N seja maior ou igual a $1\,000\,000 = 10^6$, devemos ter

$$2^1 + 2^2 + \ldots + 2^N \ge 10^6 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{2^N - 1}{2 - 1} \ge 10^6 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2^{N+1} - 2 \ge 10^6$. Como $2^{10} \cong 10^3$, com $2^{10} = 10^3 + 24$, certamente $2^{20} \ge 10^6 + 2$. Logo, $N = 19$ satisfaz a inequação. Sendo $2^{19} - 2 = 2^{10} \cdot 2^9 - 2 = 1\,024 \cdot 512 - 2 < 1\,100 \cdot 600 - 2 < 660\,000 - 2 < 10^6$, o menor valor de N para o qual é possível formar 1 000 000 de palavras de tamanho menor ou igual a N é 19.