QUESTÃO 1

Dados m e n inteiros, considere a função f definida por

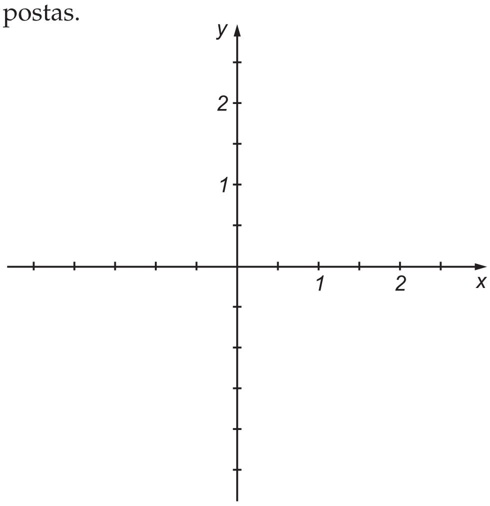
$$f(x) = 2 - \frac{m}{x+n},$$

para $x \neq -n$.

a) No caso em que $m = n = 2$, mostre que a igualdade $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ se verifica.

b) No caso em que $m = n = 2$, ache as interseções do gráfico de f com os eixos coordenados.

c) No caso em que $m = n = 2$, esboce a parte do gráfico de f em que $x > -2$, levando em conta as informações obtidas nos itens a) e b). Utilize o par de eixos dado na página de respostas.



d) Existe um par de inteiros $(m, n) \neq (2, 2)$ tal que a condição $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ continue sendo satisfeita?

Resposta

Se $m = n = 2$, $f(x) = 2 - \dfrac{2}{x+2}$.

a) $f(\sqrt{2}) = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{2}+2} = \dfrac{2\sqrt{2}+4-2}{\sqrt{2}+2} = \dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})} = \sqrt{2}$

b) *Como* $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \dfrac{2}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$ *e* $f(0) = 2 - \dfrac{2}{0+2} = 1$, *os pontos de intersecção de f com os eixos coordenados são* $(-1; 0)$ *e* $(0; 1)$.

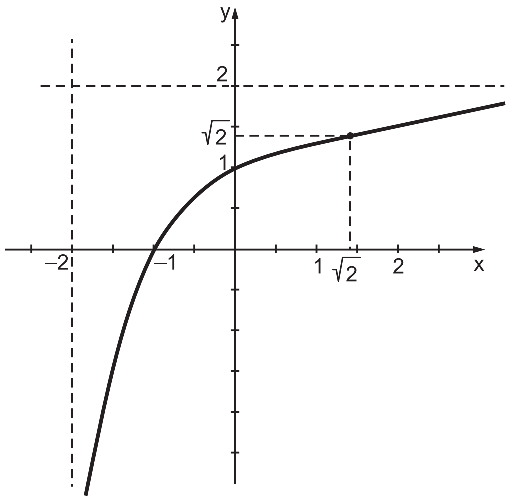
c) *Supondo f definida de* $R - \{-2\}$ *em R, podemos obter o gráfico de f a partir da hipérbole* $y = \dfrac{2}{x}$ *fazendo, nessa ordem:*

I. um deslocamento horizontal de duas unidades para a esquerda.

II. uma reflexão em torno do eixo Ox.

III. um deslocamento vertical de duas unidades para cima.

Assim, temos o gráfico:



d) $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 - \dfrac{m}{\sqrt{2}+n} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{m}{\sqrt{2}+n} = 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow m = 2\sqrt{2} - 2 +$

$+ 2n - \sqrt{2}n \Leftrightarrow m + 2 - 2n = \sqrt{2}(2-n)$

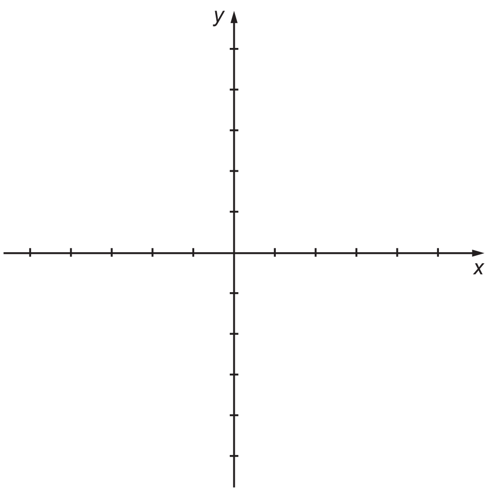
Como $(m + 2 - 2n) \in Z$ *e* $(2 - n) \in Z$, *a igualdade será satisfeita se, e somente se,* $(2 - n = 0$ *e* $m + 2 - 2n = 0) \Leftrightarrow (n = m = 2)$. *Assim não existe* $(m; n) \neq (2; 2)$ *tal que* $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

QUESTÃO 2

Considere a circunferência λ de equação cartesiana $x^2 + y^2 - 4y = 0$ e a parábola α de equação $y = 4 - x^2$.

a) Determine os pontos pertencentes à interseção de λ com α.

b) Desenhe, no par de eixos dado na página de respostas, a circunferência λ e a parábola α. Indique, no seu desenho, o conjunto dos pontos (x, y) que satisfazem, simultaneamente, as inequações $x^2 + y^2 - 4y \le 0$ e $y \ge 4 - x^2$.



Resposta

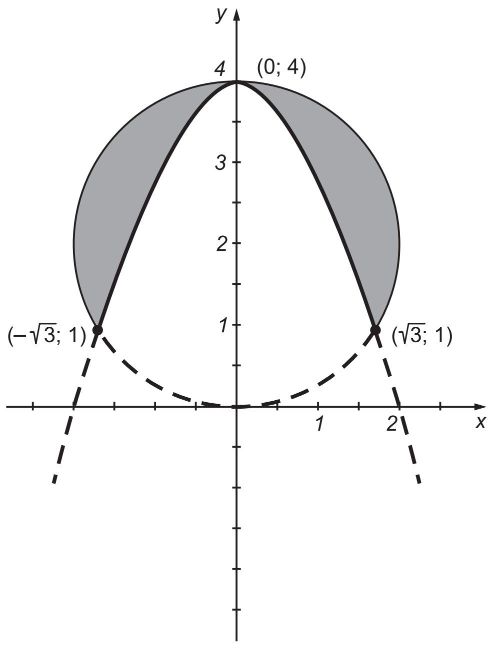
a) Temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 0 \\ x^2 = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - y + y^2 - 4y = 0 \\ x^2 = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 5y + 4 = 0 \\ x^2 = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x = \sqrt{3} \wedge y = 1) \\ \vee \\ (x = -\sqrt{3} \wedge y = 1) \\ \vee \\ (x = 0 \wedge y = 4) \end{cases}$$

Portanto, os pontos pertencentes à intersecção de λ com α são $(\sqrt{3}; 1)$, $(-\sqrt{3}; 1)$ e $(0; 4)$.

b) A circunferência λ de equação reduzida $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ tem centro $(0; 2)$ e raio 2. Assim, o conjunto dos pontos $(x; y)$ que satisfazem, simultaneamente, as inequações $x^2 + y^2 - 4y \le 0$ e $y \ge 4 - x^2$ é representado pela região sombreada do gráfico a seguir.



QUESTÃO 3

Os coeficientes a, b e c do polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ são reais. Sabendo que -1 e $1 + \alpha i$, com $\alpha > 0$, são raízes da equação $p(x) = 0$ e que o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - 1)$ é 8, determine

a) o valor de α;

b) o quociente de $p(x)$ por $(x + 1)$.

> i é a unidade imaginária, $i^2 = -1$.

Resposta

a) Como os coeficientes de $p(x)$ são reais, então as raízes são -1, $1 + \alpha i$ e $1 - \alpha i$ e $p(x) =$
$= (x - (-1))\,(x - (1 + \alpha i))\,(x - (1 - \alpha i)) =$
$= (x + 1)(x - 1 - \alpha i)\,(x - 1 + \alpha i).$

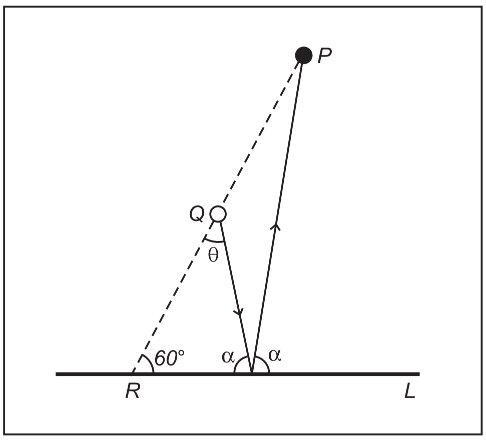
Pelo teorema do resto,
$p(1) = 8 \Leftrightarrow (1 + 1)(1 - 1 - \alpha i)(1 - 1 + \alpha i) = 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\alpha^2 = 8 \Leftrightarrow \alpha^2 = 4.$
Como $\alpha > 0$ *temos* $\alpha = 2$.
b) O quociente de p(x) por (x + 1) é

$$\frac{(x+1)(x-1-2i)(x-1+2i)}{(x+1)} =$$

$$= (x - 1 - 2i) \cdot (x - 1 + 2i) = x^2 - 2x + 5.$$

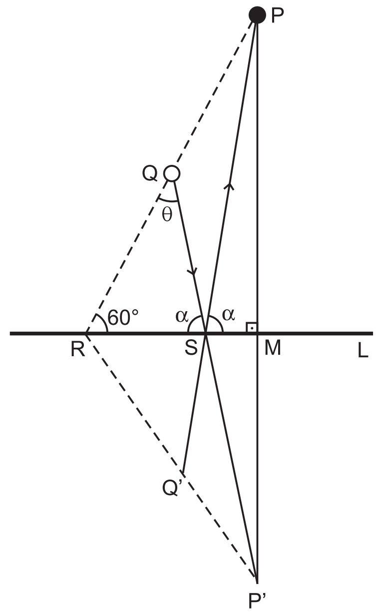
QUESTÃO 4

Uma bola branca está posicionada no ponto Q de uma mesa de bilhar retangular, e uma bola vermelha, no ponto P, conforme a figura a seguir. A reta determinada por P e Q intersecta o lado L da mesa no ponto R. Além disso, Q é o ponto médio do segmento $\overline{PR}$, e o ângulo agudo formado por $\overline{PR}$ e L mede 60^o. A bola branca atinge a vermelha, após ser refletida pelo lado L. Sua trajetória, ao partir de Q, forma um ângulo agudo θ com o segmento $\overline{PR}$ e o mesmo ângulo agudo α com o lado L antes e depois da reflexão. Determine a tangente de α e o seno de θ.



Resposta

Sejam P' e Q' as reflexões de P e Q através de L e S o ponto onde a bola branca acerta L.
Como $m(Q'\hat{S}R) = m(Q\hat{S}R) = \alpha = m(P\hat{S}M)$, *P, S e Q' são colineares. Analogamente, Q, S e P' são colineares.*



Deste modo $\overline{PQ'}$ *e* $\overline{QP'}$ *são medianas do triângulo PRP', e sua interseção S é baricentro desse triângulo. Portanto* $RS = 2SM$.
Temos $RM = RS + SM = 2SM + SM = 3SM$.
No triângulo retângulo PRM, $PR = \dfrac{RM}{\cos 60^o} =$

$$= \frac{3SM}{\frac{1}{2}} = 6SM \text{ e } PM = PR \operatorname{sen} 60^o =$$

$$= 6SM \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \cdot SM.$$

Logo, no triângulo PSM, $tg\alpha = \dfrac{PM}{SM} =$

$$= \frac{3\sqrt{3}SM}{SM} = 3\sqrt{3}$$ *e, pelo Teorema de Pitágoras,* $PS = \sqrt{SM^2 + PM^2} =$

$$= \sqrt{SM^2 + (3\sqrt{3}\,SM)^2} = 2\sqrt{7}SM,$$ *de modo que* $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{PM}{PS} = \dfrac{3\sqrt{3}SM}{2\sqrt{7}SM} = \dfrac{3\sqrt{21}}{14}$.

Pela lei dos senos, no triângulo QRS,

$$\frac{RS}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{QR}{\operatorname{sen}\alpha} \Leftrightarrow \frac{2SM}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{PR}{2}}{\frac{3\sqrt{21}}{14}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2SM}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{3SM}{\frac{3\sqrt{21}}{14}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

QUESTÃO 5

Um recipiente hermeticamente fechado e opaco contém bolas azuis e bolas brancas. As bolas de mesma cor são idênticas entre si e há pelo menos uma de cada cor no recipiente. Na tentativa de descobrir quantas bolas de cada cor estão no recipiente, usou-se uma balança de dois pratos. Verificou-se que o recipiente com as bolas pode ser equilibrado por:

I) 16 bolas brancas idênticas às que estão no recipiente ou

II) 10 bolas brancas e 5 bolas azuis igualmente idênticas às que estão no recipiente ou

III) 4 recipientes vazios também idênticos ao que contém as bolas.

Sendo P_A, P_B e P_R, respectivamente, os pesos de uma bola azul, de uma bola branca e do recipiente na mesma unidade de medida, determine

a) os quocientes $\frac{P_A}{P_B}$ e $\frac{P_R}{P_B}$;

b) o número n_A de bolas azuis e o número n_B de bolas brancas no recipiente.

Resposta

Do enunciado, temos:

$P_R + n_A P_A + n_B P_B = 16 \cdot P_B = 10 \cdot P_B + 5P_A = 4P_R$ (I)

a) (I) $\Rightarrow 6P_B = 5P_A \Leftrightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{6}{5}$; e

(I) $\Rightarrow \frac{P_R}{P_B} = \frac{16}{4} = 4$.

b) Como $\frac{P_A}{P_B} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow P_A = \frac{6}{5} P_B$ e $\frac{P_R}{P_B} = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P_R = 4P_B$, de (I) concluímos:

$P_R + n_A P_A + n_B P_B = 16 \cdot P_B \Leftrightarrow 4 \cdot P_B + n_A \cdot \frac{6}{5} \cdot P_B + n_B P_B = 16 \cdot P_B \Leftrightarrow 6n_A = 5(12 - n_B)$

Para que $6n_A$ e, consequentemente, $5(12 - n_B)$ sejam inteiros não nulos, n_A deve ser múltiplo de 5 e n_B um múltiplo de 6, positivo e menor que 12. Assim $n_B = 6$ e $n_A = \frac{5 \cdot (12 - 6)}{6} = 5$.

QUESTÃO 6

Considere o triângulo equilátero ΔA_0OB_0 de lado 7 *cm*.

a) Sendo A_1 o ponto médio do segmento $\overline{A_0B_0}$, e B_1 o ponto simétrico de A_1 em relação à reta determinada por O e B_0, determine o comprimento de $\overline{OB_1}$.

b) Repetindo a construção do item a), tomando agora como ponto de partida o triângulo ΔA_1OB_1, pode-se obter o triângulo ΔA_2OB_2 tal que A_2 é o ponto médio do segmento $\overline{A_1B_1}$, e B_2 o ponto simétrico de A_2 em relação à reta determinada por O e B_1. Repetindo mais uma vez o procedimento, obtém-se o triângulo ΔA_3OB_3. Assim, sucessivamente, pode-se construir uma sequência de triângulos ΔA_nOB_n tais que, para todo $n \geq 1$, A_n é o ponto médio de $\overline{A_{n-1}B_{n-1}}$, e B_n, o ponto simétrico de A_n em relação à reta determinada por O e B_{n-1}, conforme figura a seguir:

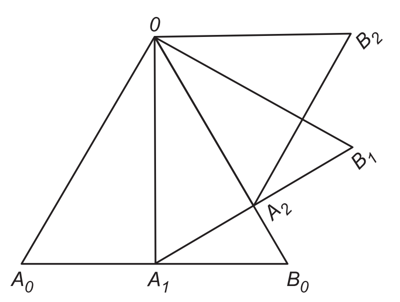


Figura obtida após aplicar o procedimento duas vezes.

Denotando por a_n, para $n \geq 1$, o comprimento do segmento $\overline{A_{n-1}A_n}$, verifique que a_1, a_2, a_3, … é uma progressão geométrica. Determine sua razão.

c) Determine, em função de n, uma expressão para o comprimento da linha poligonal $A_0A_1A_2 \dots A_n$, $n \geq 1$.

O ponto P' é simétrico ao ponto P em relação à reta r se o segmento $\overline{PP'}$ é perpendicular à reta r e a interseção de $\overline{PP'}$ e r é o ponto médio de $\overline{PP'}$.

Resposta

Como ΔA_0OB_0 é equilátero, $m(A_0\hat{B}_0O) = 60^o$. Como B_1 é simétrico a A_1 por $\overline{OB_0}$, $\overleftrightarrow{OB_0} \perp \overleftrightarrow{A_1B_1}$ e, portanto, $m(O\hat{A}_1B_1) = 60^o$ e $m(O\hat{B}_1A_1) = 60^o$.

Daí, o ΔA_1OB_1 é equilátero e, analogamente, o ΔA_nOB_n é equilátero para todo $n \geq 0$, $n \in Z$.

a) $OB_1 = OA_1$ e $\overline{OA_1}$ é a altura do ΔA_0OB_0, logo $OB_1 = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ cm.

b) $\overline{OA_n}$ é a altura do $\Delta A_{n-1}OB_{n-1}$, $n \geq 1$ e $A_{n-1}A_n = \dfrac{1}{2} \cdot OA_{n-1}$, daí

$$OA_n = OA_{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow A_nA_{n+1} = A_{n-1}A_n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$n \geq 1$, que forma uma progressão geométrica de razão $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e primeiro termo $A_0A_1 = \dfrac{A_0B_0}{2} = \dfrac{7}{2}$ cm.

c) O comprimento da linha poligonal é a soma dos n primeiros termos da PG definida no item b dada por:

$$S_n = \frac{\frac{7}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_n = 7(2 + \sqrt{3})\left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right) \text{ cm.}$$