Matemática

NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m \times n$
det(M): determinante da matriz M
M^t : transposta da matriz M
$A \setminus B : \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$
$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n : a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_k x^k, k \in \mathbb{N}$
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
i : unidade imaginária, $i^2 = -1$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
Re z : parte real do número $z \in \mathbb{C}$
$[a, b] : \{x \in \mathbb{R}; a \le x \le b\}$
$[a, b[: \{x \in \mathbb{R}; a \le x < b\}$
$]a, b[: \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$
$\sum_{n=0}^{k} a_n : a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k, k \in N$
Arg z : argumento principal de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, Arg $z \in [0, 2\pi[$
A^C : conjunto (evento) complementar do conjunto (evento) A
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B
$A\hat{B}C$: ângulo formado pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, com vértice no ponto B.

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

QUESTÃO 1

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Das afirmações:
I. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
II. $(A \cap C) \setminus B = A \cap B^C \cap C$;
III. $(A \setminus B) \cap (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$,
é (são) verdadeira(s)

a) apenas I. **b)** apenas II.
c) apenas I e II. **d)** apenas I e III.
e) todas.

alternativa C

Podemos observar inicialmente que, para quaisquer conjuntos A e B:
$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$
Consequentemente:

- $A \setminus (B \cap C) = A \cap \overline{(B \cap C)} = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) =$
$= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
e a afirmativa I é verdadeira.
- $(A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \cap \overline{B} = A \cap \overline{B} \cap C$
e a afirmativa II é verdadeira.
- $(A \setminus B) \cap (B \setminus C) = (A \cap \overline{B}) \cap (B \cap \overline{C}) =$
$= A \cap (\overline{B} \cap B) \cap \overline{C} = A \cap \emptyset \cap \overline{C} = \emptyset$.

Porém, admitindo que existe $a \in U$, *podemos tomar* $A = \{a\}$, $B = C = \emptyset$ *e* $(A \setminus B) \setminus C =$
$= (\{a\} \setminus \emptyset) \setminus \emptyset = \{a\}$, *isto é, teremos*
$(A \setminus B) \cap (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$,
e a afirmativa III é falsa.

Nota: $X^c = \overline{X}$.

QUESTÃO 2

A soma das raízes da equação em $\mathbb{C}$, $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$, tais que $z - |z| = 0$, é

a) 1. **b)** 2. **c)** 3. **d)** 4. **e)** 5.

alternativa C

Sendo $z = a + bi$, $a \in R$ *e* $b \in R$, *então:*

$z - |z| = 0 \Leftrightarrow a + bi - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ b = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = |a| \\ b = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a \ge 0 \\ b = 0 \end{array} \right.$$

Assim, a questão pede a soma das raízes reais não negativas da equação $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$.
Como, para $U = R_+$, $z^8 - 17z^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} z^4 = 16 \\ \text{ou} \\ z^4 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} z = 2 \\ \text{ou} \\ z = 1 \end{array} \right.$$ *, a soma pedida é*

$2 + 1 = 3$.

QUESTÃO 3

Considere a equação em $\mathbb{C}$, $(z-5+3i)^4=1$. Se z_0 é a solução que apresenta o menor argumento principal dentre as quatro soluções, então o valor de $|z_0|$ é

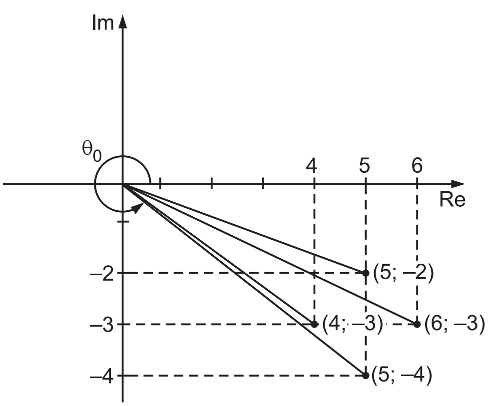
a) $\sqrt{29}$. b) $\sqrt{41}$. c) $3\sqrt{5}$.
d) $4\sqrt{3}$. e) $3\sqrt{6}$.

alternativa B

Temos $(z-5+3i)^4 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z-5+3i=1 \\ \vee \\ z-5+3i=-1 \\ \vee \\ z-5+3i=i \\ \vee \\ z-5+3i=-i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=6-3i \\ \vee \\ z=4-3i \\ \vee \\ z=5-2i \\ \vee \\ z=5-4i \end{cases}$$

As soluções estão representadas no plano complexo a seguir:



A raiz z_0 *que apresenta o menor argumento principal é a que apresenta a menor tangente, ou seja,* $z_0 = 5-4i$. *Logo*

$$|z_0| = \sqrt{5^2+(-4)^2} = \sqrt{41}.$$

QUESTÃO 4

A soma de todos os números reais x que satisfazem a equação

$$8^{\sqrt{x+1}} + 44(2^{\sqrt{x+1}}) + 64 = 19(4^{\sqrt{x+1}})$$

é igual a

a) 8. b) 12. c) 16. d) 18. e) 20.

alternativa D

$$8^{\sqrt{x+1}} + 44\cdot 2^{\sqrt{x+1}} + 64 = 19\cdot 4^{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{3\cdot\sqrt{x+1}} + 44\cdot 2^{\sqrt{x+1}} + 64 =$$

$$= 19\cdot 2^{2\cdot\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow (2^{\sqrt{x+1}})^3 - 19\cdot(2^{\sqrt{x+1}})^2 +$$

$$+ 44\cdot 2^{\sqrt{x+1}} + 64 = 0$$

Fazendo $2^{\sqrt{x+1}} = y$:

$$y^3 - 19y^2 + 44y + 64 = 0$$

Pelo dispositivo de Briot-Ruffini e utilizando que -1 *é raiz da equação:*

-1	1	-19	44	64
	1	-20	64	0

Assim $y^3 - 19y^2 + 44y + 64 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (y+1)\cdot(y^2 - 20y + 64) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = -1$ *ou* $y = 4$ *ou* $y = 16 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^{\sqrt{x+1}} = -1$ *ou* $2^{\sqrt{x+1}} = 2^2$ *ou*
$2^{\sqrt{x+1}} = 2^4$

Como $2^{\sqrt{x+1}} > 0$:

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = 2 \\ \quad ou \\ \sqrt{x+1} = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 3 \\ ou \\ x = 15 \end{array} \right.$$

Logo a soma dos reais que satisfazem a equação é $3 + 15 = 18$.

QUESTÃO 5

Se os números reais a e b satisfazem, simultaneamente, as equações

$$\sqrt{a\sqrt{b}} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \ln(a^2+b) + \ln 8 = \ln 5,$$

um possível valor de $\frac{a}{b}$ é

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. b) 1. c) $\sqrt{2}$.
d) 2. e) $3\sqrt{2}$.

alternativa A

- $\sqrt{a\sqrt{b}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a^2 b = \frac{1}{16} \\ a \ge 0 \text{ e } b \ge 0 \end{array} \right.$

- *$ln(a^2 + b) + ln\,8 = ln\,5 \Leftrightarrow ln(a^2 + b) =$*

$= ln\,\frac{5}{8} \Leftrightarrow a^2 + b = \frac{5}{8}$

Logo a^2 e b são as raízes não negativas da equação $t^2 - \frac{5}{8}t + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{8}$ ou $t = \frac{1}{2}$ e, portanto, como $a \geq 0$:

$$\left|\begin{array}{c}\left(a^2 = \frac{1}{8} \text{ e } b = \frac{1}{2}\right) \\ \text{ou} \\ \left(a^2 = \frac{1}{2} \text{ e } b = \frac{1}{8}\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c}\left(a = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ e } b = \frac{1}{2}\right) \\ \text{ou} \\ \left(a = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } b = \frac{1}{8}\right)\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \frac{a}{b} = 4\sqrt{2}.$$

QUESTÃO 6

Considere as funções f e g, da varíavel real x, definidas, respectivamente, por

$$f(x) = e^{x^2 + ax + b} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \ln\left(\frac{ax}{3b}\right),$$

em que a e b são números reais. Se $f(-1) = 1 = f(-2)$, então pode-se afirmar sobre a função composta $g \circ f$ que

a) $g \circ f(1) = \ln 3$.
b) $\nexists\ g \circ f(0)$.
c) $g \circ f$ nunca se anula.
d) $g \circ f$ está definida apenas em $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
e) $g \circ f$ admite dois zeros reais distintos.

alternativa E

Temos $\left|\begin{array}{l} f(-1) = 1 \\ f(-2) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} e^{1-a+b} = 1 \\ e^{4-2a+b} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 1 - a + b = 0 \\ 4 - 2a + b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 2 \end{array}\right.$

Assim, $f(x) = e^{x^2 + 3x + 2}$ e $g(x) = ln\left(\frac{ax}{3b}\right) =$

$= ln\left(\frac{x}{2}\right) = ln\,x - ln\,2.$

Logo $g \circ f(x) = ln(e^{x^2 + 3x + 2}) - ln\,2 =$

$= x^2 + 3x + 2 - ln\,2$, *definida para todo x real.*

Como $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - ln\,2) = 1 + 4\,ln\,2 > 0$, $g \circ f(x)$ *admite duas raízes reais distintas.*

QUESTÃO 7

Considere funções $f, g, f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Das afirmações:

I. Se f e g são injetoras, $f + g$ é injetora;
II. Se f e g são sobrejetoras, $f + g$ é sobrejetora;
III. Se f e g não são injetoras, $f + g$ não é injetora;
IV. Se f e g não são sobrejetoras, $f + g$ não é sobrejetora,
é (são) verdadeira(s)

a) nenhuma.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) apenas III e IV.
e) todas.

alternativa A

- *Considere $f(x) = x$ e $g(x) = -x$. Temos que f e g são funções reais de variável real bijetoras e $(f + g)(x) = x + (-x) = 0$ não é injetora nem sobrejetora. Ou seja, as afirmações I e II são falsas.*
- *Considere, agora, $f(x) = x - x^2$ e $g(x) = x^2$. Temos que f e g são funções reais de variável real que não são injetoras nem sobrejetoras e $(f + g)(x) = x$ é bijetora. Ou seja, as afirmações III e IV são falsas.*

QUESTÃO 8

Seja $n > 6$ um inteiro positivo não divisível por 6. Se, na divisão de n^2 por 6, o quociente é um número ímpar, então o resto da divisão de n por 6 é

a) 1. **b)** 2. **c)** 3. **d)** 4. **e)** 5.

alternativa C

Pelas condições do problema, $n^2 = 6(2t + 1) + r$, com $t \in N$ e r inteiro, $0 \leq r \leq 5$. Portanto $n^2 = 12t + (r + 6)$, $6 \leq r + 6 \leq 11$.
Como os resíduos quadráticos módulo 12 são 0, 1, 4 e 9, podemos, então, concluir que $r + 6 = 9 \Leftrightarrow r = 3$.
Assim, $n^2 = 12t + 9 = 3(4t + 3) \Rightarrow 3 | n^2 \Leftrightarrow 3 | n$, ou seja, como n é ímpar, o resto da divisão de n por 6 é 3.

QUESTÃO 9

Considere a equação $\sum_{n=0}^{5} a_n x^n = 0$ em que a soma das raízes é igual a –2 e os coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 formam, nesta ordem, uma progressão geométrica com $a_0 = 1$. Então $\sum_{n=0}^{5} a_n$ é igual a

a) –21. **b)** $-\frac{2}{3}$. **c)** $\frac{21}{32}$.

d) $\frac{63}{32}$. **e)** 63.

alternativa D

Como a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 formam, nessa ordem, uma PG com $a_0 = 1$ e sendo q a razão dessa PG, temos:

$$\sum_{n=0}^{5} a_n x^n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + qx + q^2x^2 + q^3x^3 + q^4x^4 + q^5x^5 = 0$$

Como a soma das raízes complexas da equação é –2, temos $\frac{-q^4}{q^5} = -2 \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$.

Logo $\sum_{n=0}^{5} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$

$$= 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 = 1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{63}{32}.$$

QUESTÃO 10

Seja λ solução real da equação $\sqrt{\lambda + 9} + \sqrt{2\lambda + 17} = 12$. Então a soma das soluções z, com Re $z > 0$, da equação $z^4 = \lambda - 32$, é

a) $\sqrt{2}$. **b)** $2\sqrt{2}$. **c)** $4\sqrt{2}$.
d) 4. **e)** 16.

alternativa B

Seja $\sqrt{\lambda + 9} = x$, $x \geq 0$. *Logo*

$$\sqrt{\lambda + 9} + \sqrt{2\lambda + 17} = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\lambda + 9} + \sqrt{2(\lambda + 9) - 1} = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 1} = 12 - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2x^2 - 1 = 144 - 24x + x^2 \\ 12 - x \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x^2 + 24x - 145 = 0 \\ x \leq 12 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 5 \text{ ou } x = -29 \\ x \leq 12 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 5$$

Daí, $\sqrt{\lambda + 9} = 5 \Leftrightarrow \lambda + 9 = 25 \Leftrightarrow \lambda = 16$.

Assim $z^4 = \lambda - 32 = 16 - 32 = -16 = 16(\cos\pi + i \cdot \text{sen}\pi)$. *Logo*

$$z = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)\right),$$

com $k \in Z$; *ou seja,* $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)\right)$, $k \in Z$.

Como $Re(z) > 0$, *então as raízes procuradas são:*

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \text{ e}$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

cuja soma é $\sqrt{2} + i\sqrt{2} + \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

QUESTÃO 11

Seja p uma probabilidade sobre um espaço amostral finito Ω. Se A e B são eventos de Ω tais que $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{3}$ e $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$, as probabilidades dos eventos $A \backslash B$, $A \cup B$ e $A^C \cup B^C$ são, respectivamente,

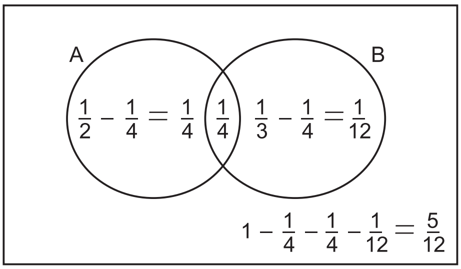
a) $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$. **b)** $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$.

c) $\frac{1}{6}, \frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$. **d)** $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{3}$.

e) $\frac{1}{4}, \frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$.

alternativa E

Podemos construir o seguinte Diagrama de Venn-Euler relativo às probabilidades:



Logo $P(A \backslash B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$ *e* $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

QUESTÃO 12

Considere os seguintes resultados relativamente ao lançamento de uma moeda:

I. Ocorrência de duas caras em dois lançamentos.

II. Ocorrência de três caras e uma coroa em quatro lançamentos.

III. Ocorrência de cinco caras e três coroas em oito lançamentos.

Pode-se afirmar que

a) dos três resultados, I é o mais provável

b) dos três resultados, II é o mais provável.

c) dos três resultados, III é o mais provável.

d) os resultados I e II são igualmente prováveis.

e) os resultados II e III são igualmente prováveis.

alternativa D

Considerando o espaço amostral equiprovável, temos que as probabilidades de ocorrência dos eventos I, II e III são, respectivamente, $p(I) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,

$p(II) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4}$ *e*

$p(III) = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32}$.

Assim, os eventos I e II são igualmente prováveis.

QUESTÃO 13

Considere $A \in M_{5x5}(\mathbb{R})$ com $\det(A) = \sqrt{6}$ e $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Se $\det(\alpha A^t A A^t) = \sqrt{6}\alpha^2$, o valor de α é

a) $\frac{1}{6}$. **b)** $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **c)** $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$.

d) 1. **e)** $\sqrt{216}$.

alternativa C

Como A é uma matriz quadrada de ordem 5 e lembrando que $\det A^t = \det A$, *temos para* $\alpha \neq 0$:

$\det(\alpha \cdot A^t A A^t) = \sqrt{6}\alpha^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^5 \cdot \det A^t \cdot \det A \cdot \det A^t = \sqrt{6}\alpha^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^5 \cdot \det A \cdot \det A \cdot \det A = \sqrt{6}\alpha^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^5 \cdot (\det A)^3 = \sqrt{6}\alpha^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3 = \frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^3} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{6}} \cdot \frac{\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6^2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\sqrt[3]{36}}{6}$

QUESTÃO 14

Sejam a um número real e n o número de todas as soluções reais e distintas $x \in [0, 2\pi]$ da equação $\cos^8 x - \operatorname{sen}^8 x + 4 \operatorname{sen}^6 x = a$. Das afirmações:

I. Se $a = 0$, então $n = 0$;

II. Se $a = \frac{1}{2}$, então $n = 8$;

III. Se $a = 1$, então $n = 7$;

IV. Se $a = 3$, então $n = 2$,

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas III.

c) apenas I e III.

d) apenas II e IV.

e) todas.

alternativa E

Seja $sen^2 x = t$. *Então*

$\cos^8 x - sen^8 x + 4\, sen^6 x = a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-t)^4 - t^4 + 4t^3 = a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6t^2 - 4t + 1 - a = 0.$

Para $a \geq \frac{1}{3}$ *temos* $t = \frac{2 + \sqrt{6a-2}}{6}$ *ou* $t = \frac{2 - \sqrt{6a-2}}{6}$ *e para* $a < \frac{1}{3}$ *não há solução real.*

Utilizaremos agora o fato de que a equação $t = sen^2 x$, *para* $x \in [0; 2\pi]$, *possui: quatro raízes distintas para* $0 < t < 1$, *três raízes reais distintas para* $t = 0$, *duas raízes reais distintas para* $t = 1$ *e nenhuma raiz real para os demais valores de* t.

Analisando as afirmações:

I. Verdadeira. Pois $a = 0 < \frac{1}{3}$, *então* $n = 0$.

II. Verdadeira. Pois se $a = \frac{1}{2}$, *temos* $t = \frac{1}{2}$ *ou* $t = \frac{1}{6}$, *então* $n = 4 + 4 = 8$.

III. Verdadeira. Pois se $a = 1$, *temos* $t = \frac{2}{3}$ *ou* $t = 0$, *então* $n = 4 + 3 = 7$.

IV. Verdadeira. Pois se $a = 3$, *temos* $t = 1$ *ou* $t = -\frac{1}{3}$, *então* $n = 2 + 0 = 2$.

QUESTÃO 15

Se $\cos 2x = \frac{1}{2}$, então um possível valor de

$$\frac{\text{cotg}\, x - 1}{\text{cossec}(x-\pi) - \sec(\pi - x)} \text{ é}$$

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **b)** 1. **c)** $\sqrt{2}$. **d)** $\sqrt{3}$. **e)** 2.

alternativa A

$$\frac{\text{cotg}\, x - 1}{\text{cosec}(x-\pi) - \sec(\pi - x)} =$$

$$= \frac{\frac{\cos x}{sen\, x} - 1}{\frac{1}{sen(x-\pi)} - \frac{1}{\cos(\pi - x)}} = \frac{\frac{\cos x - sen\, x}{sen\, x}}{\frac{1}{-sen\, x} - \frac{1}{-\cos x}} = \frac{\frac{\cos x - sen\, x}{sen\, x}}{\frac{-(\cos x - sen\, x)}{sen\, x \cos x}} =$$

$= -\cos x\ (*)$

Assim, como $\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, *um possível valor de* $(*)$ *é* $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

QUESTÃO 16

Uma reta r tangencia uma circunferência num ponto B e intercepta uma reta s num ponto A exterior à circunferência. A reta s passa pelo centro desta circunferência e a intercepta num ponto C, tal que o ângulo $A\hat{B}C$ seja obtuso. Então o ângulo $C\hat{A}B$ é igual a

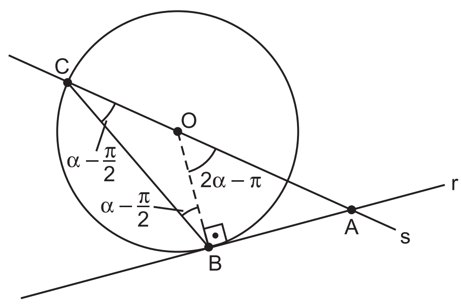
a) $\frac{1}{2}\, A\hat{B}C$. **b)** $\frac{3}{2}\pi - 2\, A\hat{B}C$.

c) $\frac{2}{3}\, A\hat{B}C$. **d)** $2\, A\hat{B}C - \pi$.

e) $A\hat{B}C - \frac{\pi}{2}$.

alternativa B

Observe a figura, onde O é o centro da circunferência:



Sendo $m(A\hat{B}C) = \alpha$, *temos* $m(O\hat{B}C) =$

$= m(O\hat{C}B) = \alpha - \frac{\pi}{2}$ *e* $m(A\hat{O}B) = 2 \cdot \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) =$

$= 2\alpha - \pi$. *Logo* $m(C\hat{A}B) = \pi - \frac{\pi}{2} - (2\alpha - \pi) =$

$= \frac{3\pi}{2} - 2\alpha = \frac{3\pi}{2} - 2\, m(A\hat{B}C)$.

QUESTÃO 17

Sobre a parábola definida pela equação $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ pode-se afirmar que

a) ela não admite reta tangente paralela ao eixo Ox.
b) ela admite apenas uma reta tangente paralela ao eixo Ox.
c) ela admite duas retas tangentes paralelas ao eixo Ox.
d) a abscissa do vértice da parábola é $x = -1$.
e) a abscissa do vértice da parábola é $x = -\frac{2}{3}$.

alternativa B

Observando que $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 + (x+y) - 3(x-y) + 1 = 0$, *rotacionando os eixos coordenados em* 45^o *no sentido anti-horário obtemos o eixo Ouv tais que:*

$$\begin{cases} u = x\cos 45^o + y\,\text{sen}\,45^o \\ v = -x\,\text{sen}\,45^o + y\cos 45^o \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = (x+y)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ v = (y-x)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = u\sqrt{2} \\ x - y = -v\sqrt{2} \end{cases}.$$

A parábola tem equação $(u\sqrt{2})^2 + u\sqrt{2} + 3v\sqrt{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow v = -\frac{\sqrt{2}}{3}u^2 - \frac{u}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$

que tem eixo paralelo à reta $u = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$

e vértice com abscissa $\dfrac{-\left(-\frac{1}{3}\right)}{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

e ordenada $-\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{8}$.

No eixo Oxy, o vértice da parábola é:

$$\left(\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)\right)\cdot\frac{1}{2};\ \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{8}; -\frac{3}{8}\right)$$

O coeficiente angular da reta tangente à parábola $v = au^2 + bu + c$, *no sistema Ouv, no ponto* (u_0, v_0) *da parábola, é* $m = 2au_0 + b$, *que assume todo valor real exatamente uma vez. Assim, toda parábola admite exatamente uma reta tangente paralela a qualquer direção, exceto a do eixo da parábola. Como no sistema Oxy a parábola tem eixo paralelo à reta* $x + y = 0$, *a parábola admite exatamente uma reta tangente paralela ao eixo Ox.*

QUESTÃO 18

Das afirmações:

I. Duas retas coplanares são concorrentes;
II. Duas retas que não têm ponto em comum são reversas;
III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;
IV. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso definem um paralelogramo,

é (são) verdadeira(s) apenas

a) III. **b)** I e III. **c)** II e III.
d) III e IV. **e)** I e II e IV.

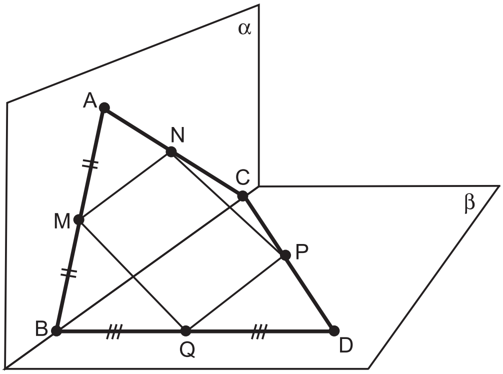
alternativa D

I. Falsa. Duas retas coplanares podem ser paralelas distintas, coincidentes ou concorrentes.

II. Falsa. Duas retas que não têm ponto em comum podem ser paralelas distintas ou reversas.

III. Verdadeira. Seja t // s e concorrente com r. O plano α *determinado por r e t, o mesmo para qualquer escolha de t // s, é paralelo à reta s. Existe ainda um único plano* β *contendo s e paralelo a* α*. Assim, dadas duas retas reversas, existem apenas dois planos paralelos, cada um contendo uma das retas.*

IV. Verdadeira. Seja ABCD o quadrilátero reverso a seguir, com A, B e C no plano α *e C, B e D no plano* β*.*



Se M, N, P e Q são os pontos médios dos lados de ABCD, $\overline{MN} \,//\, \overline{BC}$, $\overline{PQ} \,//\, \overline{BC}$, $MN = \frac{1}{2}BC = PQ$ *e* $\overline{MN} \,//\, \overline{PQ}$. *Logo MNPQ é um paralelogramo.*

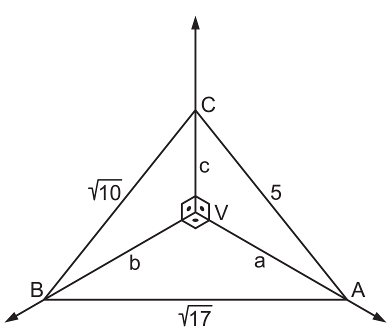
QUESTÃO 19

Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e 5 cm. O volume, em cm^3, do sólido $VABC$ é

a) 2. **b)** 4. **c)** $\sqrt{17}$.
d) 6. **e)** $5\sqrt{10}$.

alternativa A

Consideremos a figura a seguir em que $VA = a$, $VB = b$ *e* $VC = c$.



Temos $\begin{cases} a^2 + b^2 = (\sqrt{17})^2 \\ a^2 + c^2 = 5^2 \\ b^2 + c^2 = (\sqrt{10})^2 \end{cases}$ $(*)$.

Somando as 3 equações, obtemos $2(a^2 + b^2 + c^2) = 52 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 26$, *e substituindo em* $(*)$:

$$\begin{cases} c^2 = 9 \\ b^2 = 1 \\ a^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4\ cm \\ b = 1\ cm \\ c = 3\ cm \end{cases}$$

Consequentemente, o volume da pirâmide VABC é $\frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot 4}{2} \cdot 3 = 2\ cm^3$.

QUESTÃO 20

No sistema xOy os pontos $A = (2, 0)$, $B = (2, 5)$ e $C = (0, 1)$ são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para este cilindro, a razão $\frac{\text{volume}}{\text{área total da superfície}}$, em unidade de comprimento, é igual a

a) 1.

b) $\frac{100}{105}$.

c) $\frac{10}{11}$.

d) $\frac{100}{115}$.

e) $\frac{5}{6}$.

alternativa B

Como os coeficientes angulares de $\overleftrightarrow{AC}$ *e* $\overleftrightarrow{BC}$ *são, respectivamente, iguais a* $\frac{0-1}{2-0} = -\frac{1}{2}$ *e* $\frac{5-1}{2-0} = 2$, $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BC}$. *Assim, o* ΔABC *é retângulo em C e o raio da circunferência circunscrita a ele é* $\frac{AB}{2} = \frac{|5-0|}{2} = \frac{5}{2}$.

Logo, a razão

$$\frac{\text{volume do cilindro}}{\text{área total da superfície do cilindro}} \text{ é}$$

$$\frac{\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 8}{2\pi \cdot \frac{5}{2} \cdot 8 + 2\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{100}{105}.$$

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

QUESTÃO 21

Para $z = 1 + iy$, $y > 0$, determine todos os pares (a, y), $a > 1$, tais que $z^{10} = a$. Escreva a e y em função de Arg z.

Resposta

Como $z = 1 + yi$, $y > 0$, z está no primeiro quadrante e $tg(Arg\ z) = \frac{y}{1} \Leftrightarrow y = tg(Arg\ z)$, $0 < Arg\ z < \frac{\pi}{2}$. Além disso, $|z| = \sqrt{1^2 + y^2} =$

$= \sqrt{1 + tg^2(Arg\ z)} = sec(Arg\ z)$.

Sendo $a > 1$ e $a = z^{10}$, pelo Teorema de De Moivre,

$$\begin{vmatrix} Arg\ a = Arg\ z^{10} = 0 \\ |a| = |z|^{10} \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 10\ Arg\ z = 2k\pi, k \in Z \\ a = sec^{10}(Arg\ z) \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} Arg\ z = \frac{k\pi}{5}, k \in Z \\ a = sec^{10}(Arg\ z) \end{vmatrix}.$$

Já que $0 < Arg\ z < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{k\pi}{5} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 1$ *ou* $k = 2$, *temos*

$(a, y) = \left(sec^{10}\left(\frac{\pi}{5}\right), tg\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$ *ou* $(a, y) =$

$= \left(sec^{10}\left(\frac{2\pi}{5}\right), tg\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$.

Em ambos os casos,

$(a, y) = (sec^{10}(Arg\ z), tg(Arg\ z))$.

QUESTÃO 22

Determine o maior domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \log_{x\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}(4\ sen\ x \cos x - 1)$.

Resposta

$x \in D \Leftrightarrow f(x) \in R \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4\ sen\ x \cos x - 1 > 0 \\ 0 < x\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2\ sen\ 2x - 1 > 0 \\ x\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0 \\ x\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} sen\ 2x > \frac{1}{2} \\ 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ 4x^2 - \pi x + 4 \neq 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z \\ 0 < x < \frac{\pi}{4} \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in Z \\ 0 < x < \frac{\pi}{4} \end{vmatrix}$$

Logo, $D(f) = \left]\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}\right[$.

QUESTÃO 23

Considere o polinômio $P(m) = am^2 - 3m - 18$, em que $a \in \mathbb{R}$ é tal que a soma das raízes de P é igual a 3. Determine a raiz m de P tal que duas, e apenas duas, soluções da equação em x, $x^3 + mx^2 + (m + 4)x + 5 = 0$, estejam no intervalo $]-2, 2[$.

Resposta

Sendo a soma das raízes de P igual a 3, temos $-\frac{(-3)}{a} = 3 \Leftrightarrow a = 1$. *Assim,* $P(m) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = -3$ *ou* $m = 6$.

Seja $Q(x) = x^3 + mx^2 + (m + 4)x + 5$. *Observando que* $Q(-1) = (-1)^3 + m(-1)^2 +$
$+ (m + 4)(-1) + 5 = 0$, -1 *é raiz de Q. Como*

-1	1	m	$m + 4$	5
	1	$m - 1$	5	0

,

$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ *ou* $x^2 + (m - 1)x + 5 = 0$ $(*)$

Para $m = -3$, *obtemos* $(*) \Leftrightarrow x = -1$ *ou*

$x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ *ou* $x = 2 + i$ *ou*

$x = 2 - i$.

Para m = 6, obtemos (*) ⇔ x = −1 ou
$x^2 + 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ *ou* $x = \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$ *ou*
$x = \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}$.

Temos $2 < \sqrt{5} < 3$, *logo* $-\dfrac{3}{2} < \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2} < -1$
e $-4 < \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2} < \dfrac{-7}{2} < -2$.
Portanto m = 6.

QUESTÃO 24

Quantos tetraedros regulares de mesma dimensão podemos distinguir usando 4 cores distintas para pintar todas as suas faces? Cada face só pode ser pintada com uma única cor.

Resposta

Para definir a posição de um tetraedro regular, basta definir a posição de duas de suas faces. Além disso, quaisquer duas faces de um tetraedro são vizinhas.
Com isso, podemos dividir o problema em quatro casos:

- *Utilizando uma cor: há 4 possibilidades (basta escolher a cor).*
- *Utilizando duas cores: as faces do tetraedro podem ser das cores A, A, A, B ou A, A, B, B. Observe que nos dois casos apenas a escolha das cores determina o tetraedro. No primeiro caso, fixamos uma face A e uma face B; as outras duas faces só poderão ser A. No segundo caso, fixamos duas faces A; as outras duas faces só poderão ser B. Assim, há* $4 \cdot 3 + \binom{4}{2} = 18$ *possíveis tetraedros.*
- *Utilizando três cores: as faces do tetraedro serão das cores A, A, B, C. Fixando as faces B e C, as outras duas faces só poderão ser A. Assim, basta escolher as cores para determinar o tetraedro, o que pode ser feito de* $4 \cdot \binom{3}{2} = 12$ *maneiras.*
- *Utilizando as quatro cores: pintando o tetraedro de A, B, C, D, se fixarmos quaisquer duas faces A e B, haverá duas possibilidades para as outras faces: C, D e D, C. Assim, há dois tetraedros possíveis (sendo estes tetraedros enantiomorfos).*

O total de tetraedros distinguíveis após rotações é, portanto, 4 + 18 + 12 + 2 = 36.
Obs.: *se considerarmos tetraedros distinguíveis após rotações e reflexões, o total é 35, já que, no último caso, os dois tetraedros deixariam de ser distinguíveis após uma reflexão.*

QUESTÃO 25

Considere o sistema na variável real x:

$$\begin{cases} x^2 - x = \alpha \\ x - x^3 = \beta. \end{cases}$$

a) Determine os números reais α e β para que o sistema admita somente soluções reais.
b) Para cada valor de β encontrado em (a), determine todas as soluções da equação $x - x^3 = \beta$.

Resposta

a) Seja $r \in \mathbb{R}$ *uma raiz de* $x^2 - x = \alpha \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 - x - \alpha = 0$. *O sistema tem solução se, e somente se,* $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 + 4\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq -\dfrac{1}{4}$ *e*

$$\left|\begin{array}{l} r^2 - r = \alpha \\ r - r^3 = \beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} r^2 = r + \alpha \\ r - r\cdot(r+\alpha) = \beta \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} r^2 = r + \alpha \\ r - r^2 - r\alpha = \beta \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} r = \dfrac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2} \text{ ou } r = \dfrac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2} \\ -\alpha - r\alpha = \beta \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \left(r = \dfrac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2} \text{ e } \beta = \dfrac{-\alpha(3+\sqrt{1+4\alpha})}{2}\right) \\ \text{ou} \\ \left(r = \dfrac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2} \text{ e } \beta = \dfrac{-\alpha(3-\sqrt{1+4\alpha})}{2}\right) \end{array}\right.$$

Assim, o sistema tem somente soluções reais se, e somente se, $\alpha \geq -\dfrac{1}{4}$ *e*
$\beta = \dfrac{-\alpha(3+\sqrt{1+4\alpha})}{2}$ *ou* $\beta = \dfrac{-\alpha(3-\sqrt{1+4\alpha})}{2}$

b) Sendo r como no item anterior, temos que r é também solução de $x - x^3 = \beta \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^3 - x + \beta = 0$. Assim,

r	1	0	−1	β
	1	r	r^2-1	$r^3 - r + \beta = 0$

e $x - x^3 = \beta \Leftrightarrow x = r$ ou $x^2 + rx + (r^2 - 1) = 0$.

O discriminante dessa equação é

$\Delta = r^2 - 4 \cdot 1 \cdot (r^2 - 1) = 4 - 3r^2 = 4 - 3(r + \alpha) =$ $= 4 - 3\alpha - 3r$ *para* $\beta = -\alpha - \alpha r$. *Sejam θ e $-\theta$ as raízes quadradas complexas (possivelmente reais) de $4 - 3\alpha - 3r$. Então $x - x^3 = \beta \Leftrightarrow$*

$$\Leftrightarrow x = r \text{ ou } x = \frac{-r+\theta}{2} \text{ ou } x = \frac{-r-\theta}{2} \text{ e}$$

$$V = \left\{r, \frac{-r+\theta}{2}, \frac{-r-\theta}{2}\right\} \text{ para } \beta = -\alpha - \alpha r,$$

$$r = \frac{1 - \sqrt{1+4\alpha}}{2} \text{ ou } r = \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2} \text{ e } \theta, -\theta$$

raízes quadradas de $4 - 3\alpha - 3r$.

Nota: Para "admita somente soluções reais", desconsideramos o conjunto vazio e os conjuntos soluções com elementos não reais.

QUESTÃO 26

Considere o sistema nas variáveis reais x e y:

$$\begin{cases} x \operatorname{sen} \alpha + 3\, y \cos \alpha = a \\ x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = b, \end{cases}$$

com $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Analise para que valores de α, a e b o sistema é (i) possível determinado, (ii) possível indeterminado ou (iii) impossível, respectivamente. Nos casos (i) e (ii), encontre o respectivo conjunto-solução.

Resposta

O sistema é spd se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & 3\cos\alpha \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha - 3\cos^2\alpha \neq 0 \Leftrightarrow 1 - 4\cos^2\alpha \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha \neq \pm\frac{1}{2}. \text{ Como } \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[,\ \alpha \neq \frac{\pi}{3},$$

$a \in R$ e $b \in R$.

Resolvendo o sistema para $\alpha \neq \frac{\pi}{3}$, $a \in R$ e $b \in R$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 3\cos\alpha \\ b & \operatorname{sen}\alpha \end{vmatrix}}{1 - 4\cos^2\alpha} = \frac{a\operatorname{sen}\alpha - 3b\cos\alpha}{1 - 4\cos^2\alpha}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & a \\ \cos\alpha & b \end{vmatrix}}{1 - 4\cos^2\alpha} = \frac{b\operatorname{sen}\alpha - a\cos\alpha}{1 - 4\cos^2\alpha}$$

$$V = \left\{\left(\frac{a\operatorname{sen}\alpha - 3b\cos\alpha}{1 - 4\cos^2\alpha}; \frac{b\operatorname{sen}\alpha - a\cos\alpha}{1 - 4\cos^2\alpha}\right)\right\}$$

Para $\alpha = \frac{\pi}{3}$:

$$\begin{vmatrix} x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3y \cdot \frac{1}{2} = a \\ x \cdot \frac{1}{2} + y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = b \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x\sqrt{3} + 3y = 2a \\ x\sqrt{3} + 3y = 2b\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

Se $2a \neq 2b\sqrt{3} \Leftrightarrow a \neq b\sqrt{3}$, o sistema é impossível.

Se $a = b\sqrt{3}$, temos:

$$x\sqrt{3} + 3y = 2a \Leftrightarrow y = \frac{2a - x\sqrt{3}}{3}$$

$$V = \left\{\left(\lambda; \frac{2a - \lambda\sqrt{3}}{3}\right) \in R^2, \lambda \in R\right\}$$

Resumindo: para $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $a \in R$ e $b \in R$,

Sistema possível e determinado $\Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{3}$ e $a \in R$ e $b \in R$;

$$V = \left\{\left(\frac{a\operatorname{sen}\alpha - 3b\cos\alpha}{1 - 4\cos^2\alpha}; \frac{b\operatorname{sen}\alpha - a\cos\alpha}{1 - 4\cos^2\alpha}\right)\right\}.$$

Sistema impossível $\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ e $a \neq b\sqrt{3}$; $V = \emptyset$.

Sistema possível e indeterminado $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ e } a = b\sqrt{3};$$

$$V = \left\{\left(\lambda; \frac{2a - \lambda\sqrt{3}}{3}\right) \in R^2, \lambda \in R\right\}.$$

QUESTÃO 27

Encontre os pares $(\alpha, \beta) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ que satisfazem simultaneamente as equações $(\text{tg}\,\alpha + \text{cotg}\,\beta) \cos\alpha \,\text{sen}\,\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1$ e $\sqrt{3}\,\text{sen}(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$.

Resposta

Temos $\frac{-\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$ *e* $0 < \alpha + \beta < \pi$.

Assim, $\cos(\alpha - \beta) > 0$ *e*

$$\begin{cases} (\text{tg}\alpha + \text{cotg}\beta)\cos\alpha\,\text{sen}\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1 \\ \sqrt{3}\,\text{sen}(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\beta}{\text{sen}\beta}\right)\cos\alpha\,\text{sen}\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) + 1 = 0 \\ \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\,\text{sen}(\alpha + \beta) + \cos\frac{\pi}{3}\cos(\alpha + \beta) = \cos\frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\cos^2(\alpha - \beta) + \cos(\alpha - \beta) + 1 = 0 \\ \cos\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\alpha - \beta) = 1 \text{ ou } \cos(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2} \\ \alpha + \beta - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \alpha + \beta - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \left(\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \alpha + \beta = \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta = \frac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ \alpha = \beta = \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

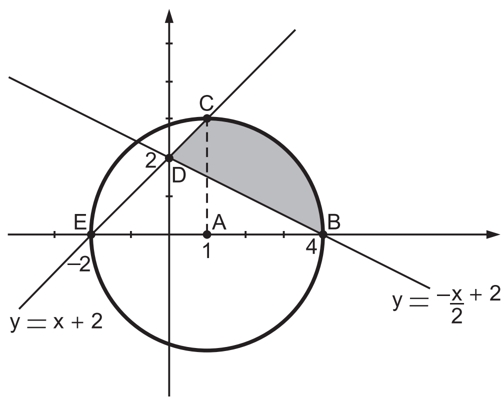
Assim, os pares pedidos são $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ *e* $\left(\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}\right)$.

QUESTÃO 28

Determine a área da figura plana situada no primeiro quadrante e delimitada pelas curvas $(y - x - 2)\left(y + \frac{x}{2} - 2\right) = 0$ e $x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$.

Resposta

Temos $(y - x - 2)\left(y + \frac{x}{2} - 2\right) = 0 \Leftrightarrow y = x + 2$ *ou* $y = -\frac{x}{2} + 2$ *e* $x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 3^2$. *Observemos a figura:*



O ponto C, de abscissa positiva, é a intersecção da reta $y = x + 2$ *com a circunferência, isto é, a solução do sistema*

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 9 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Logo $C = (1; 3)$.

A área destacada é igual à diferença entre as áreas do semicírculo, de diâmetro $\overline{BE}$ *e centro A, e a soma das áreas do* ΔBED *com o segmento circular de arco* $\overset{\frown}{CE}$, *isto é,*

$$\frac{\pi \cdot 3^2}{2} - \left[\frac{6 \cdot 2}{2} + \left(\frac{\pi \cdot 3^2}{4} - \frac{3 \cdot 3}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{9\pi}{2} - 6 - \frac{9\pi}{4} + \frac{9}{2} = \frac{9\pi - 6}{4}.$$

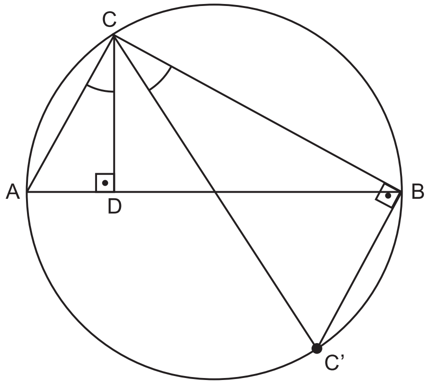
QUESTÃO 29

Em um triângulo de vértices A, B e C, a altura, a bissetriz e a mediana, relativamente ao vértice C, dividem o ângulo $B\hat{C}A$ em quatro ângulos iguais. Se l é a medida do lado oposto ao vértice C, calcule:

a) A medida da mediana em função de l.

b) Os ângulos $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$.

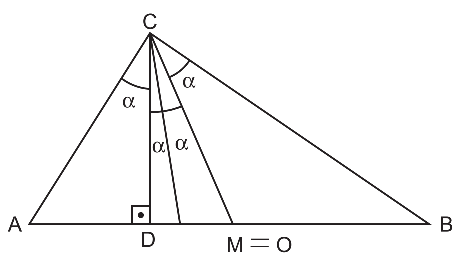
Resposta



Seja C' o ponto diametralmente oposto a C na circunferência circunscrita do ΔABC. Então $m(C\hat{C}'B) = m(C\hat{A}B)$ e $m(C\hat{B}C') = m(C\hat{D}A) = 90°$, de modo que $m(C'\hat{C}B) = m(A\hat{C}D)$.

Logo o diâmetro $\overline{CC'}$ contém a mediana e o circuncentro O de ABC.

Como O é a interseção da reta que contém a mediana por C e da mediatriz de $\overline{AB}$, que são distintas e contêm o ponto médio M de $\overline{AB}$, os pontos O e M coincidem. Portanto ΔABC é retângulo em C.



a) M é o ponto médio da hipotenusa $\overline{AB}$.

Logo $CM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\ell}{2}$.

b) Temos $4\alpha = 90° \Leftrightarrow \alpha = 22°30'$. Sendo os triângulos COB e COA isósceles, os ângulos de ΔABC são $\alpha = 22°30'$, $3\alpha = 67°30'$ e $m(B\hat{C}A) = 90°$. Os ângulos $A\hat{B}C$ e $C\hat{A}B$ podem ser 22°30' e 67°30' em qualquer ordem.

QUESTÃO 30

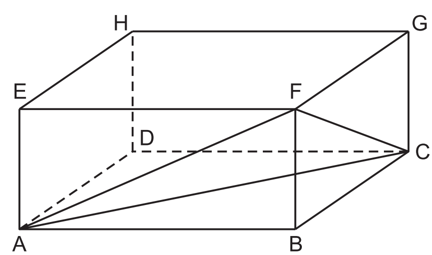
Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo de bases retangulares $ABCD$ e $EFGH$, em que A, B, C e D são, respectivamente, as projeções ortogonais de E, F, G e H. As medidas das arestas distintas AB, AD e AE constituem uma progressão aritmética cuja soma é 12 cm. Sabe-se que o volume da pirâmide $ABCF$ é igual a 10 cm^3. Calcule:

a) As medidas das arestas do paralelepípedo.

b) O volume e a área total da superfície do paralelepípedo.

Resposta

Sendo $(a - r, a, a + r)$ a progressão aritmética de razão r cujos elementos são AB, AD e AE, temos $a - r + a + a + r = 12 \Leftrightarrow a = 4$ cm.



a) Sendo 10 cm^3 o volume da pirâmide ABCF, $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{(4-r)\cdot 4}{2} \cdot (4+r) = 10 \Leftrightarrow r = \pm 1$. Assim, as medidas das arestas são 3 cm, 4 cm e 5 cm.

b) O volume do paralelepípedo retorretângulo ABCDEFGH é $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ cm^3 e sua área total é $2(3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5) = 94$ cm^2.