# Matemática

**FUVEST**

**ETAPA**

## QUESTÃO 1

Um empreiteiro contratou um serviço com um grupo de trabalhadores pelo valor de R$ 10.800,00 a serem igualmente divididos entre eles. Como três desistiram do trabalho, o valor contratado foi dividido igualmente entre os demais. Assim, o empreiteiro pagou, a cada um dos trabalhadores que realizaram o serviço, R$ 600,00 além do combinado no acordo original.

**a)** Quantos trabalhadores realizaram o serviço?

**b)** Quanto recebeu cada um deles?

### Resposta

*a) Sendo n o total inicial de trabalhadores ($n \in N^*$), temos que a diferença entre o pagamento para cada um dos (n – 3) trabalhadores e para cada um dos n trabalhadores foi de R$ 600,00, assim:*

$$\frac{10\,800}{n-3} - \frac{10\,800}{n} = 600 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 600n(n-3) = 10\,800 \cdot 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 54 = 0 \Leftrightarrow n = 9$$

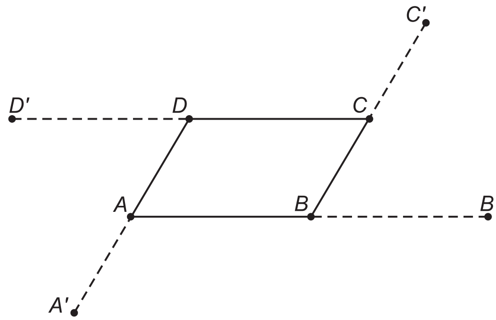
*Assim, 9 – 3 = 6 trabalhadores realizaram o serviço.*

*b) Cada um dos 6 trabalhadores recebeu*

$$\frac{R\$\,10.800{,}00}{6} = R\$\,1.800{,}00.$$

## QUESTÃO 2

Percorre-se o paralelogramo $ABCD$ em sentido anti-horário. A partir de cada vértice atingido ao longo do percurso, prolonga-se o lado recém-percorrido, construindo-se um segmento de mesmo comprimento que esse a seguir. As extremidades dos prolongamentos são denotadas por $A'$, $B'$, $C'$ e $D'$, de modo que os novos segmentos sejam, então, $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ e $\overline{DD'}$. Dado que $AB = 4$ e que a distância de $D$ à reta determinada por $A$ e $B$ é 3, calcule a área do




**a)** paralelogramo $ABCD$;

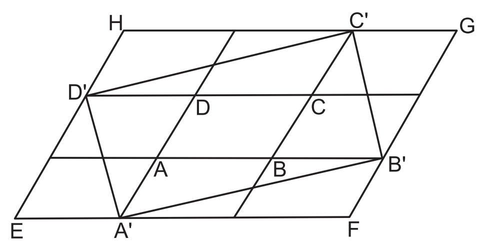
**b)** triângulo $BB'C'$;

**c)** quadrilátero $A'B'C'D'$.

### Resposta

*a) A altura relativa a $\overline{AB}$ é d (D, $\overleftrightarrow{AB}$) = 3, logo $área_{ABCD} = 4 \cdot 3 = 12$.*

*Para os itens b e c, trace por A', B', C' e D' retas paralelas respectivamente a $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{DA}$; e prolongue as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{DA}$:*




*Note que, como AA' = AD = BC = CC' e BB' = = AB = CD = DD', as paralelas e os prolongamentos determinam nove paralelogramos congruentes, incluindo ABCD. Note ainda que, por simetria, $\Delta BB'C' \cong \Delta DD'A'$ e $\Delta AA'B' \cong \cong \Delta CC'D'$.*

*b) Temos* $área_{BB'C'} = \dfrac{1}{2}\, área_{BB'GC'} =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 2\, área_{ABCD} = área_{ABCD} = 12.$

*c) Temos* $área_{A'B'C'D'} = área_{ABCD} +$

$+ 2\, área_{BB'C'} + 2\, área_{CC'D'} = área_{ABCD} +$

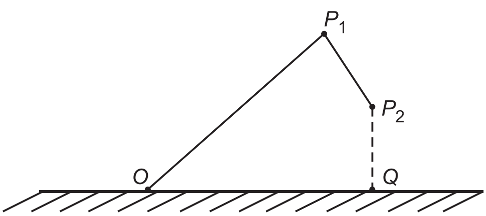
$+ área_{BB'GC'} + área_{CD'HC'} =$

$= área_{ABCD} + 2\, área_{ABCD} + 2\, área_{ABCD} =$

$= 5 \cdot 12 = 60.$

## QUESTÃO 3

Um guindaste, instalado em um terreno plano, tem dois braços articulados que se movem em um plano vertical, perpendicular ao plano do chão. Na figura, os pontos $O$, $P_1$ e $P_2$ representam, respectivamente, a articulação dos dois braços e a extremidade livre do guindaste. O braço $\overline{OP_1}$ tem comprimento 6 e o braço $\overline{P_1P_2}$ tem comprimento 2. Num dado momento, a altura de $P_2$ é 2, $P_2$ está a uma altura menor do que $P_1$ e a distância de $O$ a $P_2$ é $2\sqrt{10}$. Sendo $Q$ o pé da perpendicular de $P_2$ ao plano do chão, determine



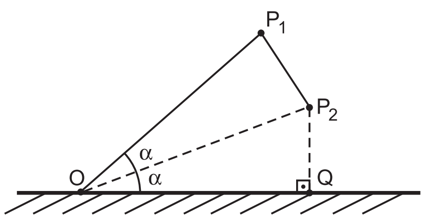

**a)** o seno e o cosseno do ângulo $P_2\hat{O}Q$ entre a reta $\overleftrightarrow{OP_2}$ e o plano do chão;

**b)** a medida do ângulo $O\hat{P}_1P_2$ entre os braços do guindaste;

**c)** o seno do ângulo $P_1\hat{O}Q$ entre o braço $\overline{OP_1}$ e o plano do chão.

### Resposta

*Consideremos a figura a seguir:*




*Como $OP_1 = 6$, $P_1P_2 = 2$, $OP_2 = 2\sqrt{10}$ e $(2\sqrt{10})^2 = 2^2 + 6^2$, $m(O\hat{P}_1P_2) = 90°$ pelo Teorema de Pitágoras.*

*Dessa maneira, como $P_2P_1 = 2$ e no instante analisado $P_2Q = 2$, $P_2$ equidista de $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OQ}$, ou seja, pertence à bissetriz do ângulo $P_1\hat{O}Q$.*

*Se $m(P_1\hat{O}P_2) = \alpha$, então $m(P_2\hat{O}Q) = \alpha$ também.*

a) $sen(P_2\hat{O}Q) = sen\alpha = sen(P_1\hat{O}P_2) = \dfrac{P_1P_2}{OP_2} = \dfrac{2}{2\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$ e $cos(P_2\hat{O}Q) = cos\alpha = cos(P_1\hat{O}P_2) = \dfrac{OP_1}{OP_2} = \dfrac{6}{2\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

b) $m(O\hat{P}_1P_2) = 90°$

c) $sen(P_1\hat{O}Q) = sen(2\alpha) = 2\,sen\alpha \cdot cos\alpha = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{10} \cdot \dfrac{3\sqrt{10}}{10} = \dfrac{3}{5}$

## QUESTÃO 4

Sócrates e Xantipa enfrentam-se em um popular jogo de tabuleiro, que envolve a conquista e ocupação de territórios em um mapa. Sócrates ataca jogando três dados e Xantipa se defende com dois. Depois de lançados os dados, que são honestos, Sócrates terá conquistado um território se e somente se as duas condições seguintes forem satisfeitas:

1) o maior valor obtido em seus dados for maior que o maior valor obtido por Xantipa;

2) algum outro dado de Sócrates cair com um valor maior que o menor valor obtido por Xantipa.

**a)** No caso em que Xantipa tira 5 e 5, qual é a probabilidade de Sócrates conquistar o território em jogo?

**b)** No caso em que Xantipa tira 5 e 4, qual é a probabilidade de Sócrates conquistar o território em jogo?

### Resposta

*Representaremos os resultados dos lançamentos dos dados de Sócrates por triplas ordenadas (a; b; c), sendo a, b e c as quantidades de pontos de cada dado.*

*Em ambos os itens, a quantidade de resultados possíveis é $6^3$.*

*a) Os casos favoráveis a Sócrates, nesse caso, são (6; 6; 6), (6; 6; x), (6; x; 6) e (x; 6; 6), com $1 \le x \le 5$, totalizando $1 + 3 \cdot 5 = 16$ possibilidades. A probabilidade é, então, $\dfrac{16}{6^3} = \dfrac{2}{27}$.*

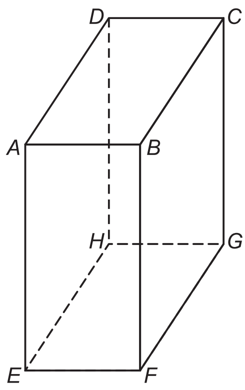
*b) Dividindo os casos favoráveis de acordo com os dois maiores números obtidos por Sócrates, há duas possibilidades:*

- *Os dois maiores resultados são 6 e 6: pelo item anterior, são 16 possibilidades.*
- *Os dois maiores resultados são 6 e 5: há as 3 possibilidades, (6; 5; 5), (5; 6; 5) e (5; 5; 6), e as possibilidades (6; 5; x), $1 \le x \le 4$ e suas permutações, que são $4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$ possibilidades. Nesse caso, temos $3 + 24 = 27$ possibilidades.*

*A probabilidade é, então,* $\dfrac{16+27}{6^3} = \dfrac{43}{216}$.

## QUESTÃO 5

No paralelepípedo reto retângulo $ABCDEFGH$ da figura, tem-se $AB = 2$, $AD = 3$ e $AE = 4$.



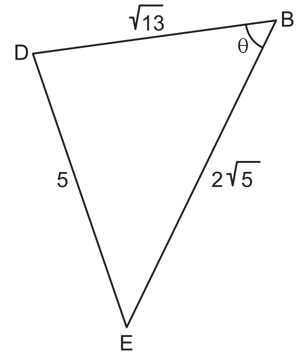

**a)** Qual é a área do triângulo $ABD$?
**b)** Qual é o volume do tetraedro $ABDE$?
**c)** Qual é a área do triângulo $BDE$?
**d)** Sendo $Q$ o ponto do triângulo $BDE$ mais próximo do ponto $A$, quanto vale $AQ$?

### Resposta

*a) A área do triângulo ABD, retângulo em Â, é* $\dfrac{AB \cdot AD}{2} = \dfrac{2 \cdot 3}{2} = 3$.

*b) O volume do tetraedro ABDE é um terço do produto da área do triângulo ABD pela altura AE, ou seja,* $\dfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 = 4$.

*c) Temos, por Pitágoras, que* $ED^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow ED = 5$, $DB^2 = 2^2 + 3^2 \Leftrightarrow DB = \sqrt{13}$ *e* $EB^2 = 2^2 + 4^2 \Leftrightarrow EB = 2\sqrt{5}$. *Assim o triângulo BDE torna-se como descrito a seguir:*




*Sendo* $m(D\hat{B}E) = \theta$, *temos, pela lei dos cossenos que:*

$$DE^2 = DB^2 + EB^2 - 2 \cdot DB \cdot EB \cdot \cos\theta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 25 = 13 + 20 - 2 \cdot \sqrt{13} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \cos\theta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{2\sqrt{65}}{65} \text{ e } \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} =$$
$$= \sqrt{1 - \frac{4}{65}} = \sqrt{\frac{61}{65}}.$$

*Logo a área do triângulo BDE é* $\dfrac{1}{2} \cdot EB \cdot DB \cdot \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{13} \cdot \dfrac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}} = \sqrt{61}$.

*d) AQ é a altura do tetraedro ABDE relativa ao vértice A, assim temos que* $\dfrac{1}{3} \cdot$ *área do triângulo BDE* $\cdot\ AQ =$ *volume ABDE* $= 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \sqrt{61} \cdot AQ = 4 \Leftrightarrow AQ = \frac{12\sqrt{61}}{61}.$$

## QUESTÃO 6

Considere o polinômio $p(x) = x^4 + 1$.
**a)** Ache todas as raízes complexas de $p(x)$.
**b)** Escreva $p(x)$ como produto de dois polinômios de segundo grau, com coeficientes reais.

### Resposta

*a) Temos* $x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -1$. *As raízes complexas de p(x) são as raízes quartas de* $-1 = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi$, *ou seja:*

$$w_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$$

$$w_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$$

$$w_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$$

$$w_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$$

b) $p(x) = x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 =$

$= ((x^2 + 1) + \sqrt{2}\,x) \cdot ((x^2 + 1) - \sqrt{2}\,x) =$

$= (x^2 + \sqrt{2}\,x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)$

Obs.: *pode-se escrever também* $p(x) =$

$= (kx^2 + k\sqrt{2}\,x + k) \cdot \left(\frac{x^2}{k} - \frac{\sqrt{2}}{k}\,x + \frac{1}{k}\right),$

$k \in R^*$.