Matemática

ITA
ETAPA

NOTAÇÕES

N : conjunto dos números naturais
R : conjunto dos números reais
R^+ : conjunto dos números reais não negativos
i : unidade imaginária; $i^2 = -1$
arg z : argumento do número complexo z
$[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$
$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$
A^C : complementar do conjunto A
$P(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A
$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B
$\widehat{AB}$: arco de circunferência de extremidades A e B
$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, $n \in N$
Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 1

Deseja-se trocar uma moeda de 25 centavos, usando-se apenas moedas de 1, 5 e 10 centavos. Então, o número de diferentes maneiras em que a moeda de 25 centavos pode ser trocada é igual a

a) 6. b) 8. c) 10. d) 12. e) 14.

alternativa D

Sejam x, y e z, respectivamente, os totais de moedas de 1, 5 e 10 centavos. Desejamos contar o número de soluções naturais de $x + 5y + 10z = 25$ (*).
Temos que $x + 5y + 10z = 25 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 5(5 - y - 2z)$, ou seja, $x = 5x'$ com $x' \in N$.
Logo $x + 5y + 10z = 25 \Leftrightarrow 5x' + 5y + 10z = 25 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x' + y + 2z = 5 \Leftrightarrow x' + y = 5 - 2z$.
O número de soluções naturais da equação $a + b = n$, $n \in N$, é $n + 1$. Portanto, como $x' + y = 5 - 2z \Leftrightarrow x' + y = 5$ ou $x' + y = 3$ ou $x' + y = 1$, a equação (*) tem $6 + 4 + 2 = 12$ soluções.

Questão 2

Dois atiradores acertam o alvo uma vez a cada três disparos. Se os dois atiradores disparam simultaneamente, então a probabilidade do alvo ser atingido pelo menos uma vez é igual a

a) $\frac{2}{9}$. b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{4}{9}$. d) $\frac{5}{9}$. e) $\frac{2}{3}$.

alternativa D

Supondo que os eventos são independentes, a probabilidade de os dois atiradores errarem o alvo é igual a $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Logo a probabilidade do alvo ser atingido pelo menos uma vez é igual a $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

Questão 3

Sejam $z = n^2(\cos 45^o + i \text{ sen } 45^o)$ e $w = n(\cos 15^o + i \text{ sen } 15^o)$, em que n é o menor inteiro positivo tal que $(1 + i)^n$ é real. Então, $\frac{z}{w}$ é igual a

a) $\sqrt{3} + i$.
b) $2(\sqrt{3} + i)$.
c) $2(\sqrt{2} + i)$.
d) $2(\sqrt{2} - i)$.
e) $2(\sqrt{3} - i)$.

alternativa B

Como $(1 + i)^n = (\sqrt{2})^n \cdot [\cos(n \cdot 45^o) + i \text{ sen}(n \cdot 45^o)]$, o menor n para que $(1 + i)^n$ seja real é tal que $\text{sen}(n \cdot 45^o) = 0$, ou seja, $n = 4$.
Assim,

$$\frac{z}{w} = \frac{4^2}{4}(\cos(45^o - 15^o) + i \text{ sen}(45^o - 15^o)) =$$
$$= 4(\cos 30^o + i \text{ sen } 30^o) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) =$$
$$= 2(\sqrt{3} + i).$$

Questão 4

Se $\arg z = \frac{\pi}{4}$, então um valor para $\arg(-2iz)$ é

a) $-\frac{\pi}{2}$. b) $\frac{\pi}{4}$. c) $\frac{\pi}{2}$. d) $\frac{3\pi}{4}$. e) $\frac{7\pi}{4}$.

alternativa E

O argumento principal de $-2i$ é $\frac{3\pi}{2}$. Assim, um valor para $\arg(-2iz)$ é $\arg(-2i) + \arg z = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$.

Questão 5

Sejam r_1, r_2 e r_3 números reais tais que $r_1 - r_2$ e $r_1 + r_2 + r_3$ são racionais. Das afirmações:

I. Se r_1 é racional ou r_2 é racional, então r_3 é racional;

II. Se r_3 é racional, então $r_1 + r_2$ é racional;

III. Se r_3 é racional, então r_1 e r_2 são racionais,

é (são) sempre verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas III.

d) apenas I e II.

e) I, II e III.

alternativa E

$$\left|\begin{array}{l} r_1 - r_2 \in Q \\ r_1 + r_2 + r_3 \in Q \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} r_1 - r_2 \in Q \\ 2r_1 + r_3 \in Q \end{array}\right.$$

Logo $r_2 \in Q \Leftrightarrow r_1 \in Q \Leftrightarrow r_3 \in Q$ e as três afirmações são verdadeiras.

Questão 6

As raízes x_1, x_2 e x_3 do polinômio $p(x) = 16 + ax - (4 + \sqrt{2})x^2 + x^3$ estão relacionadas pelas equações:

$x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2$ e $x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0$

Então, o coeficiente a é igual a

a) $2(1 - \sqrt{2})$.

b) $2(2 + \sqrt{2})$.

c) $4(\sqrt{2} - 1)$.

d) $4 + \sqrt{2}$.

e) $\sqrt{2} - 4$.

alternativa C

Pelas relações entre coeficientes e raízes, $x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2}$. Assim,

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2} \\ x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \\ x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2} \\ x_2 - \frac{x_3}{2} = -2 - \sqrt{2} \\ 3x_2 + (1 + \sqrt{2})x_3 = 4 + \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2} \\ x_2 - \frac{x_3}{2} = -2 - \sqrt{2} \\ \left(\frac{5}{2} + \sqrt{2}\right)x_3 = 10 + 4\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = 2\sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \\ x_3 = 4 \end{array}\right..$$

Logo $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} \cdot 4 + (-\sqrt{2}) \cdot 4 = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 4(\sqrt{2} - 1).$$

Questão 7

Sabe-se que $(x + 2y, 3x - 5y, 8x - 2y, 11x - 7y + 2z)$ é uma progressão aritmética com o último termo igual a -127. Então, o produto xyz é igual a

a) -60.

b) -30.

c) 0.

d) 30.

e) 60.

alternativa A

Como $(x + 2y,\ 3x - 5y,\ 8x - 2y,\ 11x - 7y + 2z)$ é uma progressão aritmética com último termo -127, temos:

$$\begin{cases} 3x - 5y = \dfrac{x + 2y + 8x - 2y}{2} \\ 8x - 2y = \dfrac{3x - 5y + 11x - 7y + 2z}{2} \\ 11x - 7y + 2z = -127 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 10y = 0 \\ x + 4y = z \\ 11x - 7y + 2 \cdot (x + 4y) = -127 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 10y = 0 \\ 13x + y = -127 \\ z = x + 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 10y = 0 \\ -130x - 10y = 1\,270 \\ z = x + 4y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow x \cdot y \cdot z = -60$$

Questão 8

Considere um polinômio $p(x)$, de grau 5, com coeficientes reais. Sabe-se que $-2i$ e $i - \sqrt{3}$ são duas de suas raízes. Sabe-se, ainda, que dividindo-se $p(x)$ pelo polinômio $q(x) = x - 5$ obtém-se resto zero e que $p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3})$. Então, $p(-1)$ é igual a

a) $5(5 - 2\sqrt{3})$.

b) $15(5 - 2\sqrt{3})$.

c) $30(5 - 2\sqrt{3})$.

d) $45(5 - 2\sqrt{3})$.

e) $50(5 - 2\sqrt{3})$.

alternativa C

Dado que $p(x)$ é um polinômio de coeficientes reais, $z \in C$ é raiz de $p(x)$ se, e somente se, $\bar{z} \in C$ é raiz de $p(x)$.

Logo, como $p(x)$ é um polinômio de grau 5 divisível por $x - 5$, então

$$p(x) = a(x - (-2i)) \cdot (x - (\overline{-2i}))(x - (i - \sqrt{3}))(x - (\overline{i - \sqrt{3}}))(x - 5),$$

com $a \in R^*$.

Assim, para $x \in R$, como $z \cdot \bar{z} = |z|^2$:

$$p(x) = a(x + 2i)(\overline{x + 2i})(x + \sqrt{3} - i)(\overline{x + \sqrt{3} - i})(x - 5)$$

$$\Leftrightarrow p(x) = a(x^2 + 2^2)((x + \sqrt{3})^2 + (-1)^2)(x - 5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(x) = a(x^2 + 4)(x^2 + 2\sqrt{3}x + 4)(x - 5)$$

e, portanto, $p(1) = a \cdot 5 \cdot (5 + 2\sqrt{3}) \cdot (-4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 20(5 + 2\sqrt{3}) = -20(5 + 2\sqrt{3})a \Leftrightarrow a = -1.$

Consequentemente, $p(-1) = (-1) \cdot 5 \cdot (5 - 2\sqrt{3})(-6) = 30(5 - 2\sqrt{3})$.

Questão 9

Um triângulo ABC tem lados com medidas $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ cm$, $b = 1\ cm$ e $c = \dfrac{1}{2}\ cm$. Uma circunferência é tangente ao lado a e também aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, ou seja, a circunferência é ex-inscrita ao triângulo. Então, o raio da circunferência, em cm, é igual a

a) $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{4}$.

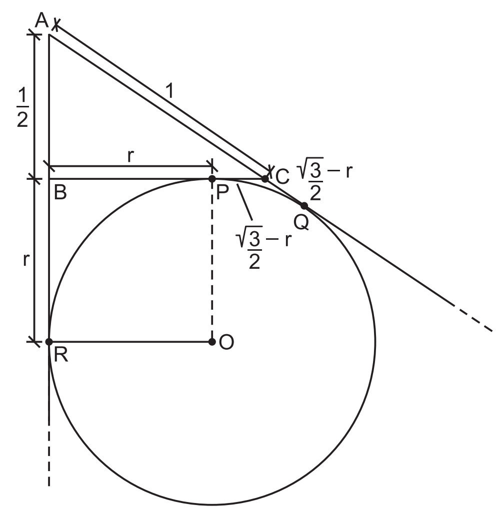
b) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

c) $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{3}$.

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

e) $\dfrac{\sqrt{3} + 2}{4}$.

alternativa A



Sejam O o centro da circunferência ex-inscrita de raio r e P, Q e R os pontos de tangência com $\overline{BC}$ e os prolongamentos de $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Como $AC^2 = AB^2 + BC^2$, o ângulo $A\hat{B}C$ é reto e, consequentemente, o quadrilátero BPOR é um quadrado de lado r. Assim:

$$CQ = PC = \frac{\sqrt{3}}{2} - r \text{ e } AQ = AR = \frac{1}{2} + r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AC + CQ = \frac{1}{2} + r \Leftrightarrow 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - r = \frac{1}{2} + r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3} + 1}{4}\ cm$$

Questão 10

Sejam $A = (0,0)$, $B = (0,6)$ e $C = (4,3)$ vértices de um triângulo. A distância do baricentro deste triângulo ao vértice A, em unidades de distância, é igual a

a) $\frac{5}{3}$. b) $\frac{\sqrt{97}}{3}$. c) $\frac{\sqrt{109}}{3}$.
d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$. e) $\frac{10}{3}$.

alternativa B

O baricentro G do triângulo ABC é o ponto $G = \left(\frac{0+0+4}{3}; \frac{0+6+3}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}; 3\right)$. Assim a distância de G até o vértice A é $\sqrt{\left(\frac{4}{3} - 0\right)^2 + (3-0)^2} = \frac{\sqrt{97}}{3}$.

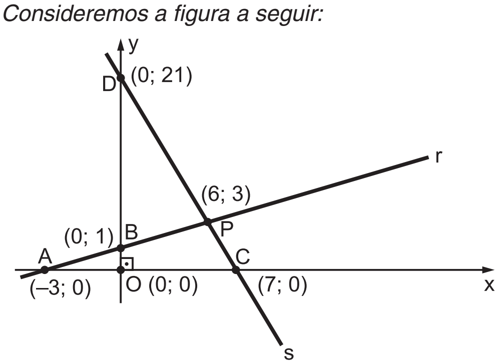
Questão 11

A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e as retas $r: x - 3y + 3 = 0$ e $s: 3x + y - 21 = 0$, em unidades de área, é igual a

a) $\frac{19}{2}$. b) 10. c) $\frac{25}{2}$. d) $\frac{27}{2}$. e) $\frac{29}{2}$.

alternativa D

Consideremos a figura a seguir:



Para encontrar o ponto P, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ 3x + y - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}. \text{ Logo } P = (6; 3).$$

A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e pelas retas r e s é igual à diferença entre as áreas dos triângulos APC e ABO, ou seja, $\frac{10 \cdot 3}{2} - \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{27}{2}$.

Questão 12

Dados os pontos $A = (0,0)$, $B = (2,0)$ e $C = (1,1)$, o lugar geométrico dos pontos que se encontram a uma distância $d = 2$ da bissetriz interna, por A, do triângulo ABC é um par de retas definidas por

a) $r_{1,2}: \sqrt{2}y - x \pm 2\sqrt{4 + \sqrt{2}} = 0.$

b) $r_{1,2}: \frac{\sqrt{2}}{2}y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0.$

c) $r_{1,2}: 2y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0.$

d) $r_{1,2}: (\sqrt{2} + 1)y - x \pm \sqrt{2 + 4\sqrt{2}} = 0.$

e) $r_{1,2}: (\sqrt{2} + 1)y - x \pm 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = 0.$

alternativa E

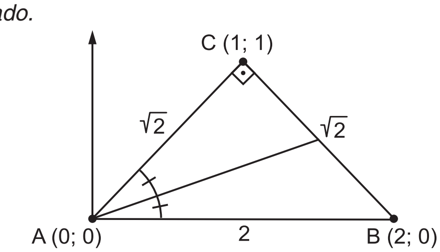
No ΔABC, $tg\,\hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow m(\hat{A}) = 45^o$. Assim, a bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ tem inclinação $m = tg\left(\frac{45^o}{2}\right)$. Como $tg\,45^o = \frac{2m}{1 - m^2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 = \frac{2m}{1 - m^2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2} - 1$ (pois $m > 0$), uma equação da bissetriz é $y - 0 = (\sqrt{2} - 1)(x - 0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x - (\sqrt{2} + 1)y = 0$.

Portanto, sendo (x; y) um ponto do lugar geométrico dos pontos que distam 2 da bissetriz, temos:

$$\frac{|x - (\sqrt{2} + 1)y|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2} + 1)^2}} = 2 \Leftrightarrow |(\sqrt{2} + 1)y - x| =$$

$$= 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1)y - x \pm 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = 0$$

que são as equações do lugar geométrico procurado.



Questão 13

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Das afirmações:

I. $(A \setminus B^C) \setminus C^C = A \cap (B \cup C)$;

II. $(A \setminus B^C) \setminus C = A \cup (B \cap C^C)^C$;

III. $B^C \cup C^C = (B \cap C)^C$,

é (são) sempre verdadeira(s) apenas

a) I. b) II. c) III.
d) I e III. e) II e III.

alternativa C

Sabe-se que $X - Y = X \cap \overline{Y}$. Assim:

- $(A - \overline{B}) - \overline{C} = (A \cap \overline{\overline{B}}) \cap \overline{\overline{C}} = (A \cap B) \cap C =$
$= A \cap (B \cap C)$
- $(A - \overline{B}) - C = (A \cap \overline{\overline{B}}) \cap \overline{C} = (A \cap B) \cap \overline{C} =$
$= A \cap (B \cap \overline{C}) = A - \overline{(B \cap \overline{C})}$.

Vamos supor que existe $u \in U$. Então:

I. Falsa. $(A - \overline{B}) - \overline{C} = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A \cap (B \cap C) = A \cap (B \cup C)$.
Tomando $A = \{u\}$, $B = \{u\}$ *e* $C = \emptyset$, *teremos* $\emptyset = \{u\}$.

II. Falsa. $(A - \overline{B}) - C = A \cup \overline{(B \cap \overline{C})} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A - \overline{(B \cap \overline{C})} = A \cup \overline{(B \cap \overline{C})}$.
Tomando $A = \emptyset$, $B = \emptyset$ *e* $C = \emptyset$, *teremos* $\emptyset = U$.

III. Verdadeira. Essa é uma das leis de Morgan.

Obs.: *se $U = \emptyset$, todas as afirmações seriam verdadeiras.*

Questão 14

Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, ambos finitos e não vazios, tais que $n(P(A) \cup P(B)) + 1 = n(P(A \cup B))$. Então, a diferença $n(A) - n(B)$ pode assumir

a) um único valor.
b) apenas dois valores distintos.
c) apenas três valores distintos.
d) apenas quatro valores distintos.
e) mais do que quatro valores distintos.

alternativa A

Como A e B são finitos e disjuntos, $n(A) = a \in N^*$; $n(B) = b \in N^*$, $n(A \cup B) = a + b$ e $P(A)$ e $P(B)$ têm apenas o conjunto vazio em comum. Assim:

$n(P(A) \cup P(B)) + 1 = n(P(A \cup B)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^a + 2^b - 1 + 1 = 2^{a+b} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^a + 2^b - 1 + 1 = 2^a \cdot 2^b \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 = 2^a \cdot 2^b - 2^a - 2^b + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 = (2^a - 1) \cdot (2^b - 1)$

Como $a, b \in N^*$, temos:

$$\left| \begin{array}{l} 2^a - 1 = 1 \\ 2^b - 1 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2^a = 2^1 \\ 2^b = 2^1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array} \right.$$

Logo: $n(A) - n(B) = 1 - 1 = 0$.

Questão 15

Considere um número real $a \neq 1$ positivo, fixado, e a equação em x

$a^{2x} + 2\beta a^x - \beta = 0, \beta \in \mathbb{R}$

Das afirmações:

I. Se $\beta < 0$, então existem duas soluções reais distintas;
II. Se $\beta = -1$, então existe apenas uma solução real;
III. Se $\beta = 0$, então não existem soluções reais;
IV. Se $\beta > 0$, então existem duas soluções reais distintas,

é (são) sempre verdadeira(s) apenas

a) I. b) I e III. c) II e III.
d) II e IV. e) I, III e IV.

alternativa C

Temos $a^{2x} + 2\beta a^x - \beta = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a^x)^2 + 2\beta(a^x) - \beta = 0$.

O discriminante Δ dessa equação na variável a^x é igual a $(2\beta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\beta) = 4\beta^2 + 4\beta =$
$= 4\beta \cdot (\beta + 1)$.

Logo $\Delta < 0 \Leftrightarrow -1 < \beta < 0$, $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \beta = -1 \\ \text{ou} \quad \text{e} \\ \beta = 0 \end{array} \right.$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \beta < -1 \\ \text{ou} \quad . \\ \beta > 0 \end{array} \right.$

I. Falsa. Para $-1 < \beta < 0$, $\Delta < 0$ e não há solução real.

II. Verdadeira. Para $\beta = -1$ a equação é
$a^{2x} - 2 \cdot a^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (a^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow a^x = a^0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0$, *apenas uma solução real.*

III. Verdadeira. Com $\beta = 0$, $a^{2x} = 0$ e como $a > 0$ não existem soluções reais.

IV. Falsa. Com $\beta > 0$, $\Delta > 0$ e como a soma e produto das raízes da equação $(a^x)^2 + 2\beta(a^x) - \beta = 0$ na variável a^x são negativos, a^x assume um valor positivo e outro negativo. Logo existe apenas uma solução real para x com $\beta > 0$.

Questão 16

Seja

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right) + \operatorname{arccos}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Então,

a) $S = \emptyset$. b) $S = \{0\}$. c) $S = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.
d) $S = \mathbb{R}^+$. e) $S = \mathbb{R}$.

alternativa B

Como $\text{arc sen } t + \text{arc cos } t = \frac{\pi}{2}$ *e* $\text{arc cos}(-t) = \pi - \text{arc cos } t$ *para todo* $t \in [-1, 1]$,

$$\text{arc sen}\left(\frac{e^{-x} - e^{x}}{2}\right) + \text{arc cos}\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{arc sen } t + \text{arc cos}(-t) = \frac{\pi}{2} \\ t = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \text{arc cos } t + \pi - \text{arc cos } t = \frac{\pi}{2} \\ t = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{arc cos } t = \frac{\pi}{2} \\ t = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = \cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow e^{-x} = e^{x} \Leftrightarrow x = 0$ *e* $S = \{0\}$.

Questão 17

Seja $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\text{sen}(x)\cos(x) = \frac{2}{5}$. Então, o produto e a soma de todos os possíveis valores de $\text{tg}(x)$ são, respectivamente

a) 1 e 0. b) 1 e $\frac{5}{2}$. c) −1 e 0.

d) 1 e 5. e) −1 e $-\frac{5}{2}$.

alternativa B

$$\text{sen } x \cdot \cos x = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{\text{sen } x \cdot \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{5\cos^2 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{2}{5}\sec^2 x \Leftrightarrow \text{tg } x = \frac{2}{5}(\text{tg}^2 x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,\text{tg}^2 x - 5\,\text{tg } x + 2 = 0$$

Como na equação temos $\Delta > 0$, *o produto e a soma de todos os valores de* $\text{tg } x$ *são, respectivamente*, $\frac{2}{2} = 1$ *e* $-\frac{(-5)}{2} = \frac{5}{2}$.

Questão 18

A soma $\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi)$, para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, vale

a) $-\cos(\alpha)$ quando n é par.

b) $-\text{sen}(\alpha)$ quando n é ímpar.

c) $\cos(\alpha)$ quando n é ímpar.

d) $\text{sen}(\alpha)$ quando n é par.

e) zero quando n é ímpar.

alternativa E

Temos que:

- *para* k *par*, $\cos(\alpha + k\pi) = \cos\alpha$;
- *para* k *ímpar*, $\cos(\alpha + k\pi) = \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$.

Logo $\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos\alpha = \cos\alpha - \cos\alpha + \ldots + (-1)^n \cos\alpha$$

e, portanto:

- *para* n *par*, $\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi) = \cos\alpha$;
- *para* n *ímpar*, $\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi) = 0$.

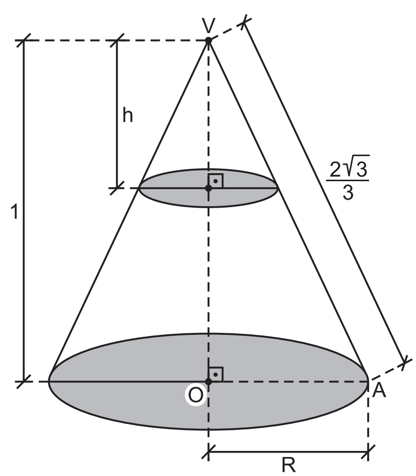
Questão 19

Um cone circular reto de altura 1 *cm* e geratriz $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ *cm* é interceptado por um plano paralelo à sua base, sendo determinado, assim, um novo cone. Para que este novo cone tenha o mesmo volume de um cubo de aresta $\left(\frac{\pi}{243}\right)^{1/3}$ *cm*, é necessário que a distância do plano à base do cone original seja, em *cm*, igual a

a) $\frac{1}{4}$. b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{1}{2}$. d) $\frac{2}{3}$. e) $\frac{3}{4}$.

alternativa D

Consideremos a figura a seguir:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOA, temos $R^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1^2 = \frac{1}{3}$. *Sendo o volume do cone menor* $\left(\left(\frac{\pi}{243}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \frac{\pi}{243}$,

$$\left(\frac{h}{1}\right)^3 = \frac{\frac{\pi}{243}}{\frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 1} \Leftrightarrow h = \frac{1}{3}.$$

Logo a distância pedida é $1 - h = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Questão 20

A superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular de 120^o e área igual a $3\pi\ cm^2$. A área total e o volume deste cone medem, em cm^2 e cm^3, respectivamente

a) 4π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.

b) 4π e $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

c) 4π e $\pi\sqrt{2}$.

d) 3π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.

e) π e $2\pi\sqrt{2}$.

alternativa A

Sendo g *a medida, em centímetros, da geratriz do cone,* $\frac{120^o}{360^o}\pi g^2 = 3\pi \Leftrightarrow g = 3$.

O comprimento do arco determinado pelo setor é $\frac{120^o}{360^o} \cdot 2\pi \cdot 3 = 2\pi$ *cm, e, sendo* r *o raio da base, temos* $2\pi r = 2\pi \Leftrightarrow r = 1$ *cm. A altura do cone é* $\sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ *cm e, portanto, sua área total é* $S_T = \pi \cdot 1^2 + 3\pi = 4\pi\ cm^2$ *e seu volume é* $\frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 2\sqrt{2} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}\ cm^3$.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21

Dez cartões estão numerados de 1 a 10. Depois de embaralhados, são formados dois conjuntos de 5 cartões cada. Determine a probabilidade de que os números 9 e 10 apareçam num mesmo conjunto.

Resposta

Seja A o conjunto em que está o cartão 9. Dentre os demais 9 números, há 4 que pertencem ao conjunto A. Assim, a probabilidade de o cartão 10 estar no mesmo conjunto que o cartão 9 é $\frac{4}{9}$.

Questão 22

Determine os valores reais de x de modo que $\text{sen}(2x) - \sqrt{3}\cos(2x)$ seja máximo.

Resposta

Temos que $\text{sen}\ 2x - \sqrt{3}\cos 2x =$

$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\text{sen}\ 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) =$

$= 2 \cdot \left(\text{sen}\ 2x \cos\frac{\pi}{3} - \cos 2x\ \text{sen}\frac{\pi}{3}\right) =$

$= 2\ \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Para que a expressão tenha valor máximo, devemos ter $\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in Z.$

Questão 23

Considere a matriz quadrada A em que os termos da diagonal principal são $1, 1 + x_1, 1 + x_2, \dots, 1 + x_n$ e todos os outros termos são iguais a 1. Sabe-se que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é 4. Determine a ordem da matriz A para que o seu determinante seja igual a 256.

Resposta

Seja $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x_n \end{vmatrix}_{n+1} \overset{\text{Chiò}}{=}$

$\overset{\text{Chiò}}{=} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}_n =$

$= x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$.

Como $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é uma PG com $x_1 = \frac{1}{2}$ e $q = 4$, temos $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = x_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} =$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 4^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{n^2 - 2n}$.

Sendo $|A| = 256$, $2^{n^2 - 2n} = 2^8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 - 2n = 8 \Leftrightarrow n = 4$ ou $n = -2$. Logo a ordem da matriz é $n + 1 = 4 + 1 = 5$.

Questão 24

Seja n um número natural. Sabendo que o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2 \frac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \frac{1}{125} & -\log_5 25 \end{bmatrix}$$

é igual a 9, determine n e também a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa A^{-1}.

Resposta

Temos que $|A| = \begin{vmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2 \frac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \frac{1}{125} & -\log_5 25 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ n+5 & n & 5 \\ -5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2n^2 + 19n - 30.$

Logo $|A| = 9 \Leftrightarrow -2n^2 + 19n - 30 = 9 \Leftrightarrow n = \frac{13}{2}$ ou $n = 3$.

Como $n \in \mathbb{N}$, vem que $n = 3$. Sendo $A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$, temos que $A \cdot A^{-1} = I_3$, logo

$3b_{11} + b_{21} + b_{31} = 1 \Leftrightarrow b_{11} + b_{21} + b_{31} = 1 - 2b_{11}$.

Assim $b_{11} = \frac{A_{11}}{|A|} = \frac{1}{9} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 1$ e, portanto, $b_{11} + b_{21} + b_{31} = 1 - 2 \cdot 1 = -1$.

Questão 25

Em um plano estão situados uma circunferência ω de raio 2 cm e um ponto P que dista $2\sqrt{2}$ cm do centro de ω. Considere os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes a ω nos pontos A e B, respectivamente. Ao girar a região fechada delimitada pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ e pelo arco menor $\widehat{AB}$ em torno de um eixo passando pelo centro de ω e perpendicular ao segmento $\overline{PA}$, obtém-se um sólido de revolução. Determine:

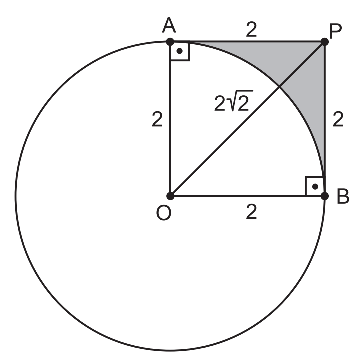
a) A área total da superfície do sólido.

b) O volume do sólido.

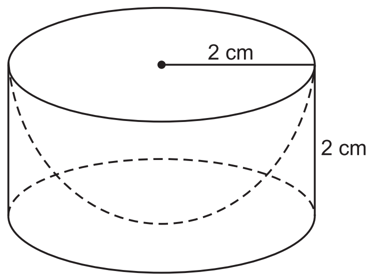
Resposta

Seja O o centro da circunferência. Então $PO = 2\sqrt{2}$ cm, $AO = 2$ cm e, pelo Teorema de Pitágoras, $PA^2 + AO^2 = PO^2 \Leftrightarrow PA = 2$ cm.

Sendo PÂO reto e PA = PB = OA = OB, o quadrilátero PAOB é um quadrado.



Assim, o sólido em questão é um cilindro de raio PA = 2 cm e altura 2 cm do qual foi subtraída uma semiesfera de raio OB = 2 cm:



a) A superfície corresponde à superfície lateral do cilindro, uma base de cilindro e um hemisfério, que é $2\pi \cdot 2 \cdot 2 + \pi \cdot 2^2 + \frac{1}{2} 4\pi 2^2 = 20\pi\ cm^2$.

b) O volume do sólido é o volume do cilindro subtraindo-se o da semiesfera, ou seja,

$$\pi \cdot 2^2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi \cdot 2^3}{3} = \frac{8\pi}{3}\ cm^3.$$

Questão 26

As interseções das retas $r: x - 3y + 3 = 0$, $s: x + 2y - 7 = 0$ e $t: x + 7y - 7 = 0$, duas a duas, respectivamente, definem os vértices de um triângulo que é a base de um prisma reto de altura igual a 2 unidades de comprimento. Determine:

a) A área total da superfície do prisma.

b) O volume do prisma.

Resposta

As interseções das retas, duas a duas, definem os seguintes pontos, vértices do triângulo:

$$\begin{vmatrix} x - 3y + 3 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x = 3 \\ y = 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x - 3y + 3 = 0 \\ x + 7y - 7 = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x = 0 \\ y = 1 \end{vmatrix} \text{ e } \begin{vmatrix} x + 2y - 7 = 0 \\ x + 7y - 7 = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x = 7 \\ y = 0 \end{vmatrix}.$$

Logo a área do triângulo é $\frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 5$

e seus lados medem $\sqrt{(3-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$, $\sqrt{(3-7)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{5}$ e $\sqrt{(0-7)^2 + (1-0)^2} = 5\sqrt{2}$.

a) A área total da superfície do prisma é $2 \cdot 5 + \sqrt{10} \cdot 2 + 2\sqrt{5} \cdot 2 + 5\sqrt{2} \cdot 2 = 10 + 2\sqrt{10} + 4\sqrt{5} + 10\sqrt{2}$.

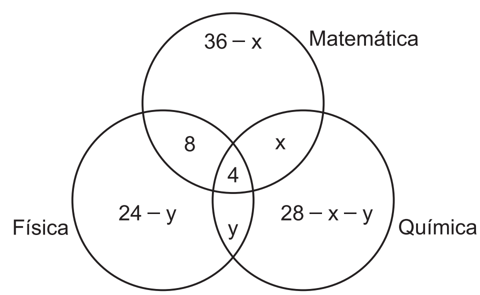
b) O volume do prisma é $5 \cdot 2 = 10$.

Questão 27

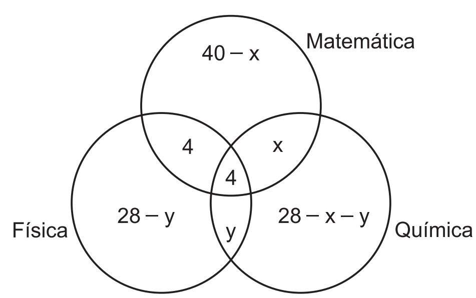
Dos n alunos de um colégio, cada um estuda pelo menos uma das três matérias: Matemática, Física e Química. Sabe-se que 48% dos alunos estudam Matemática, 32% estudam Química e 36% estudam Física. Sabe-se, ainda, que 8% dos alunos estudam apenas Física e Matemática, enquanto 4% estudam todas as três matérias. Os alunos que estudam apenas Química e Física mais aqueles que estudam apenas Matemática e Química totalizam 63 estudantes. Determine n.

Resposta

Considerando que a expressão "estudam apenas X e Y" indica os elementos de $X \cap Y - (X \cap Y \cap Z)$*, temos o seguinte diagrama de Venn, com valores indicados em porcentagem:*



Como todo aluno estuda alguma matéria, $48 + 24 + 28 - x - y = 100 \Leftrightarrow x + y = 0$*; porém* $(x + y)\% \cdot n = 63 \Leftrightarrow 0n = 63$*, que não tem solução. Agora, considerando que "estudam apenas X e Y" indica os elementos de* $X \cap Y$*:*



$48 + 28 + 28 - x - y = 100 \Leftrightarrow x + y = 4$. *Assim* $(x + 4 + y + 4)\% \cdot n = 63 \Leftrightarrow 12\% \cdot n = 63 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n = 525$.

Questão 28

Analise se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & x \geq 0 \\ 3 - x^2, & x < 0 \end{cases}$ é bijetora e, em caso afirmativo, encontre $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Resposta

Vamos considerar a relação inversa g. Sabemos que g é de R em R e $(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in g$. Para provarmos que f é bijetora, basta mostrarmos que g é função.

Para $x \geq 0$, $y = 3 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = y - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{y - 3}$ com $y \geq 3$. Para $x < 0$,

$y = 3 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 3 - y \Leftrightarrow x = -\sqrt{3 - y}$ com $y < 3$.

Portanto, g é função com $g: R \to R$ e

$$g(y) = \begin{cases} \sqrt{y - 3}, & y \geq 3 \\ -\sqrt{3 - y}, & y < 3 \end{cases}$$

. Assim, f é bijetora e $f^{-1} = g$.

Questão 29

Determine os valores de $\theta \in [0, 2\pi]$ tais que $\log_{\text{tg}(\theta)} e^{\text{sen}(\theta)} \geq 0$.

Resposta

Para $\theta \in [0; 2\pi]$, temos:

$$\log_{tg\theta} e^{sen\theta} \geq 0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 0 < tg\theta < 1 \\ e^{sen\theta} \leq 1 \end{array}\right. \text{ ou } \left|\begin{array}{l} tg\theta > 1 \\ e^{sen\theta} \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \pi < \theta < \frac{5\pi}{4} \\ sen\theta \leq 0 \end{array}\right. \text{ ou}$$

$$\left|\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2} \\ sen\theta \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \pi < \theta < \frac{5\pi}{4} \\ \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{array}\right. \text{ ou}$$

$$\left|\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi < \theta < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

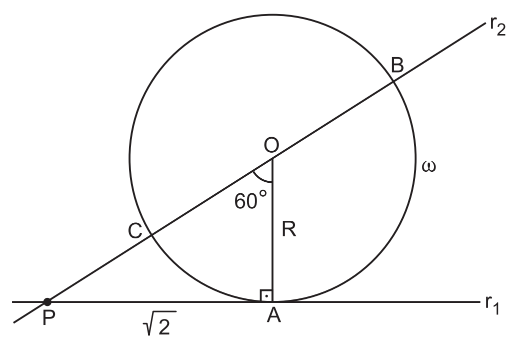
Logo $\theta \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi; \frac{5\pi}{4}\right[$.

Questão 30

As retas r_1 e r_2 são concorrentes no ponto P, exterior a um círculo ω. A reta r_1 tangencia ω no ponto A e a reta r_2 intercepta ω nos pontos B e C diametralmente opostos. A medida do arco $\widehat{AC}$ é 60° e $\overline{PA}$ mede $\sqrt{2}$ cm. Determine a área do setor menor de ω definido pelo arco $\widehat{AB}$.

Resposta

Considere a figura a seguir, em que O é o centro e R é o raio da circunferência.



Como o arco $\widehat{AC}$ mede 60^o, o ângulo $A\hat{O}P$ também mede 60^o. Sendo o triângulo AOP retângulo em A, temos $tg(A\hat{O}P) = \frac{PA}{OA} \Leftrightarrow tg\ 60^o = \frac{\sqrt{2}}{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{2}{3}}$ cm.

Assim, o ângulo do menor setor definido pelo arco $\widehat{AB}$ mede $180^o - 60^o = 120^o$, e sua área é

$$\frac{120^o}{360^o} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2\pi}{9} cm^2.$$