Matemática

FUVEST

ETAPA

Questão 1

O polinômio $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 8$, em que a, b, c são números reais, tem o número complexo $1 + i$ como raiz, bem como duas raízes simétricas.

a) Determine a, b, c e as raízes de $p(x)$.

b) Subtraia 1 de cada uma das raízes de $p(x)$ e determine todos os polinômios com coeficientes reais, de menor grau, que possuam esses novos valores como raízes.

Resposta

a) Como o polinômio possui apenas coeficientes reais e $1 + i$ é raiz de $p(x)$, então $1 - i$ também é raiz desse polinômio.

Sejam x_0 e $-x_0$ as outras duas raízes simétricas de $p(x)$.

Pelas relações entre coeficientes e raízes, temos:

$$(1 + i) + (1 - i) + x_0 + (-x_0) = -\frac{a}{1} \Leftrightarrow a = -2$$

$$(1 + i)(1 - i) \cdot x_0 \cdot (-x_0) = -\frac{8}{1} \Leftrightarrow x_0 = 2 \text{ ou } x_0 = -2$$

Logo as outras raízes são 2 e -2, portanto:

$$\left|\begin{array}{l} p(2) = 0 \\ p(-2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 16 - 16 + 4b + 2c - 8 = 0 \\ 16 + 16 + 4b - 2c - 8 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} b = -2 \\ c = 8 \end{array}\right.$$

Logo $a = -2$, $b = -2$ e $c = 8$ e as raízes de $p(x)$ são $1 + i$, $1 - i$, 2 e -2.

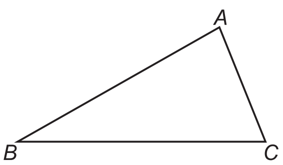
b) As raízes desses novos polinômios são i, $-i$, 1 e -3.

Escrevendo na forma fatorada, esses polinômios são da forma $k \cdot (x - i) \cdot (x + i) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3) =$

$$= k(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 2x - 3) =$$

$$= k(x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3), \text{ onde } k \in R^*.$$

Questão 2



No triângulo acutângulo ABC, ilustrado na figura, o comprimento do lado $\overline{BC}$ mede $\sqrt{15}/5$, o ângulo interno de vértice C mede α, e o ângulo interno de vértice B mede $\alpha/2$. Sabe-se, também, que

$$2\cos(2\alpha) + 3\cos\alpha + 1 = 0.$$

Nessas condições, calcule

a) o valor de sen α;

b) o comprimento do lado $\overline{AC}$.

Resposta

a) Sendo $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$,

$$2\cos(2\alpha) + 3\cos\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

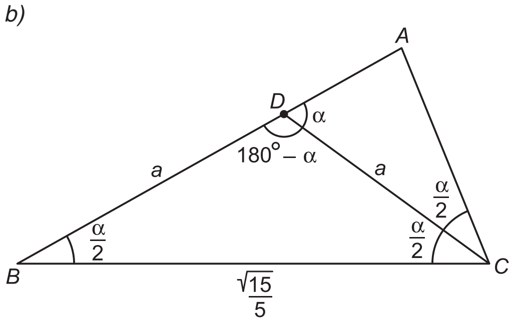
$$\Leftrightarrow 2(2\cos^2\alpha - 1) + 3\cos\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\alpha + 3\cos\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = -1 \text{ ou } \cos\alpha = \frac{1}{4}.$$

Como $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \cos\alpha < 1$, $\cos\alpha = \frac{1}{4}$

$$\text{e } \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

b)



Seja D o pé da bissetriz relativa ao lado AB, assim o triângulo BDC é isósceles de base $\overline{BC}$ e $m(A\hat{D}C) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$. Pela lei dos cossenos no triângulo BDC,

$$\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(180^o - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{25} = 2a^2 + 2a^2 \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5} = 2a^2 + 2a^2 \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{6}}{5}.$$

Por outro lado, pelo caso AA, o triângulo ACD é semelhante ao triângulo ABC, assim:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{5}}{\frac{\sqrt{15}}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{AD + BD}{AC} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + \frac{BD}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{6}}{5}}{AC} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow AC = \frac{2\sqrt{15}}{15}$$

Questão 3

a) Dez meninas e seis meninos participarão de um torneio de tênis infantil. De quantas maneiras distintas essas 16 crianças podem ser separadas nos grupos A, B, C e D, cada um deles com 4 jogadores, sabendo que os grupos A e C serão formados apenas por meninas e o grupo B, apenas por meninos?

b) Acontecida a fase inicial do torneio, a fase semifinal terá os jogos entre Maria e João e entre Marta e José. Os vencedores de cada um dos jogos farão a final. Dado que a probabilidade de um menino ganhar de uma menina é 3/5, calcule a probabilidade de uma menina vencer o torneio.

Resposta

a) O grupo A pode ser formado de $\binom{10}{4}$ *modos.*

Podemos com as 6 meninas restantes formar o grupo C de $\binom{6}{4}$ *modos. O grupo B pode ser formado de* $\binom{6}{4}$ *maneiras e, após determinar os três grupos, o grupo D já estará definido.*

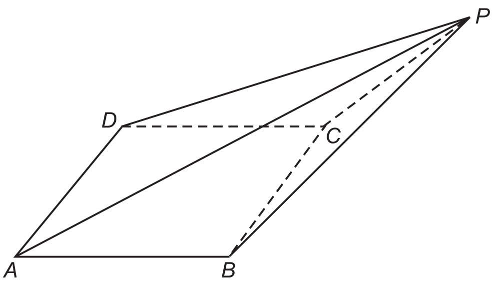
Portanto o número de maneiras pedido é $\binom{10}{4}\binom{6}{4}\binom{6}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2!} = 47\,250.$

b) A probabilidade de uma menina vencer um menino é $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. *Se as duas meninas forem para a final, então automaticamente uma menina vence o torneio; a probabilidade nesse caso é de* $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$.

A probabilidade de uma menina enfrentar um menino na final, sabendo que existem 2 meninos, é $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot 2$. *Como a probabilidade dela vencer a final é* $\frac{2}{5}$, *a probabilidade de uma menina enfrentar um menino e vencê-lo é* $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{24}{125}$.

Logo, a probabilidade de uma menina vencer o torneio é $\frac{4}{25} + \frac{24}{125} = \frac{44}{125}$.

Questão 4



A base do tetraedro $PABCD$ é o quadrado $ABCD$ de lado ℓ, contido no plano α. Sabe-se que a projeção ortogonal do vértice P no plano α está no semiplano de α determinado pela reta $\overleftrightarrow{BC}$ e que não contém o lado $\overline{AD}$. Além disso, a face BPC é um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$ cuja altura forma, com o plano α, um ângulo θ, em que $0 < \theta < \pi/2$. Sendo $PB = \ell\sqrt{2}/2$, determine, em função de ℓ e θ,

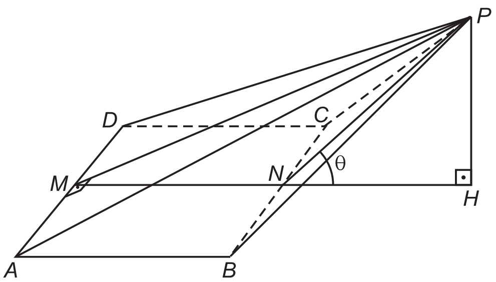
a) o volume do tetraedro $PABCD$;

b) a altura do triângulo APB relativa ao lado $\overline{AB}$;

c) a altura do triângulo APD relativa ao lado $\overline{AD}$.

Resposta

Sejam M e N os pontos médios de $\overline{AD}$ *e* $\overline{BC}$, *respectivamente. Como PBC é um triângulo isósceles com* $PB = PC$, *o plano* β *que passa por P, M e N é plano de simetria da pirâmide e, portanto,* α *é perpendicular a* β.



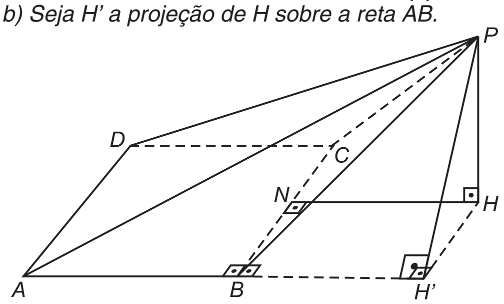
No triângulo PBN, $PN = \sqrt{PB^2 - BN^2} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{\ell}{2}.$$

Sendo PH a altura da pirâmide, temos que $H \in \beta$ e $P\hat{N}H = \theta$. Assim, no triângulo retângulo PNH, $\frac{PH}{PN} = \operatorname{sen}\theta \Leftrightarrow PH = \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta$.

a) O volume da pirâmide de PABCD é $\frac{1}{3}\ell^2 \cdot PH = \frac{\ell^3\operatorname{sen}\theta}{6}$.

b) Seja H' a projeção de H sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$.



O quadrilátero BH'HN é um retângulo de lados $HH' = BN = \frac{\ell}{2}$ e NH. Assim, sendo $\overline{HH'} \perp \overline{AB}$ e $\overline{PH} \perp \alpha$, pelo teorema das três perpendiculares $\overline{PH'} \perp AB$, e portanto $\overline{PH'}$ é a altura desejada.

Pelo Teorema de Pitágoras, $PH' = \sqrt{PH^2 + HH'^2} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{\ell\operatorname{sen}\theta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{\ell}{2}\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\theta}.$$

c) Por simetria, o triângulo APD é isósceles, de modo que a altura pedida é PM. No triângulo PMN, $m(P\hat{N}M) = 180^\circ - \theta$, $PN = \frac{\ell}{2}$ e $MN = \ell$.

Assim, pela lei dos cossenos,

$PM^2 = PN^2 + MN^2 - 2 \cdot PN \cdot MN \cdot \cos(180^\circ - \theta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow PM^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \ell^2 - 2 \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \ell \cdot (-\cos\theta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow PM = \frac{\ell}{2}\sqrt{5 + 4\cos\theta}$.

Obs.: a pirâmide PABCD tem cinco faces e portanto não é um tetraedro.

Questão 5

Determine para quais valores reais de x é verdadeira a desigualdade

$$|x^2 - 10x + 21| \le |3x - 15|.$$

Resposta

$|x^2 - 10x + 21| \le |3x - 15| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 10x + 21)^2 \le (3x - 15)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 10x + 21)^2 - (3x - 15)^2 \le 0 \Leftrightarrow$

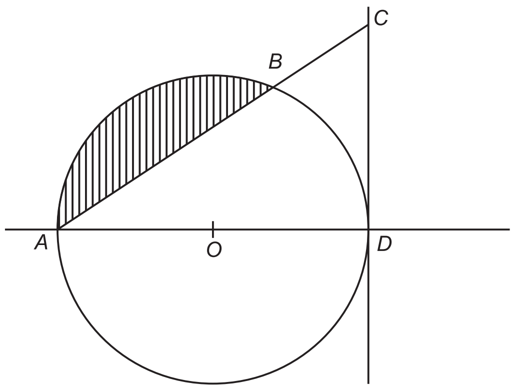
$\Leftrightarrow (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 13x + 36) \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 6)(x - 4)(x - 9) \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 \le x \le 4$ ou $6 \le x \le 9$

$V = [1, 4] \cup [6, 9]$

Questão 6



Na figura, a circunferência de centro O é tangente à reta $\overleftrightarrow{CD}$ no ponto D, o qual pertence à reta $\overleftrightarrow{AO}$. Além disso, A e B são pontos da circunferência, $AB = 6\sqrt{3}$ e $BC = 2\sqrt{3}$. Nessas condições, determine

a) a medida do segmento $\overline{CD}$;

b) o raio da circunferência;

c) a área do triângulo AOB;

d) a área da região hachurada na figura.

Resposta

a) Pelo teorema da secante-tangente:

$CB \cdot CA = CD^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}) = CD^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow CD = 4\sqrt{3}$

b) Sendo r o raio da circunferência, como a reta $\overleftrightarrow{CD}$ é tangente à circunferência, o triângulo ACD é retângulo em D. Assim, pelo Teorema de Pitágoras:

$AD^2 + CD^2 = AC^2 \Leftrightarrow (2r)^2 + 48 = 192 \Leftrightarrow r = 6$

c) No triângulo retângulo ACD, $tg\, C\hat{A}D = \frac{CD}{AD} = \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow m(C\hat{A}D) = 30^o$. *Assim, sendo AO e BO raios,* $m(A\hat{O}B) = 180^o - 2 \cdot m(C\hat{A}D) = 180^o - 2 \cdot 30^o = 120^o$ *e a área do triângulo AOB é* $\frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot sen(A\hat{O}B) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$.

d) A região hachurada é um segmento circular de ângulo 120^o. *Assim, sua área é igual à área do setor AOB menos a área do triângulo AOB, ou seja,* $\frac{120}{360} \cdot \pi \cdot 6^2 - 9\sqrt{3} = 3(4\pi - 3\sqrt{3})$.