Questão 20

Uma geladeira é vendida em n parcelas iguais, sem juros. Caso se queira adquirir o produto, pagando-se 3 ou 5 parcelas a menos, ainda sem juros, o valor de cada parcela deve ser acrescido de R$ 60,00 ou de R$ 125,00, respectivamente. Com base nessas informações, conclui-se que o valor de n é igual a

a) 13 b) 14 c) 15 d) 16 e) 17

alternativa A

Seja p o valor, em reais, de cada uma das n parcelas. Então, se pagarmos 3 parcelas a menos, o valor de cada parcela é p + 60, e se pagarmos 5 parcelas a menos, o valor de cada parcela é p + 125. Logo:

$$\left|\begin{array}{l}(n-3)(p+60)=np\\(n-5)(p+125)=np\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}20n-p=60\\25n-p=125\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}n=13\\p=200\end{array}\right.$$

Questão 21

Sejam $f(x) = 2x - 9$ e $g(x) = x^2 + 5x + 3$. A soma dos valores absolutos das raízes da equação $f(g(x)) = g(x)$ é igual a

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

alternativa D

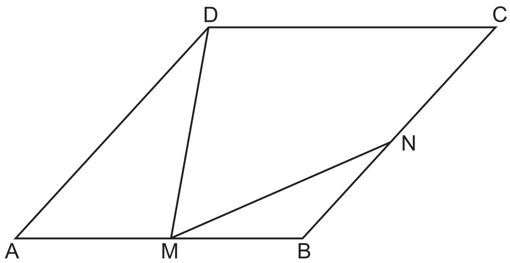
Sendo $f(x) = 2x - 9$ *e* $g(x) = x^2 + 5x + 3$, $f(g(x)) = g(x) \Leftrightarrow 2 \cdot g(x) - 9 = g(x) \Leftrightarrow g(x) = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ *ou* $x = -6$.

Portanto, a soma dos valores absolutos das raízes de $f(g(x)) = g(x)$ *é* $|1| + |-6| = 7$.

Questão 22

No losango $ABCD$ de lado 1, representado na figura, tem-se que M é o ponto médio de $\overline{AB}$, N é o ponto médio de $\overline{BC}$ e $MN = \sqrt{14}/4$. Então, DM é igual a



a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

alternativa B

Seja $\alpha = m(M\hat{B}N)$. *Aplicando a lei dos cossenos no triângulo MBN, temos:*

$$MN^2 = MB^2 + NB^2 - 2 \cdot MB \cdot NB \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{4}$$

Como ABCD é losango, $m(D\hat{A}M) = 180^o - \alpha$. *Logo, aplicando a lei dos cossenos no triângulo DAM:*

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 - 2 \cdot AM \cdot AD \cdot$$

$$\cdot \cos(180^o - \alpha) \Leftrightarrow DM^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 - 2 \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-\cos\alpha) \Leftrightarrow DM = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Questão 23

Seja $x > 0$ tal que a sequência $a_1 = \log_2 x$, $a_2 = \log_4(4x)$, $a_3 = \log_8(8x)$ forme, nessa ordem, uma progressão aritmética. Então, $a_1 + a_2 + a_3$ é igual a

a) $\frac{13}{2}$ b) $\frac{15}{2}$ c) $\frac{17}{2}$ d) $\frac{19}{2}$ e) $\frac{21}{2}$

alternativa B

Sendo $x > 0$ *e* (a_1, a_2, a_3) *uma PA:*

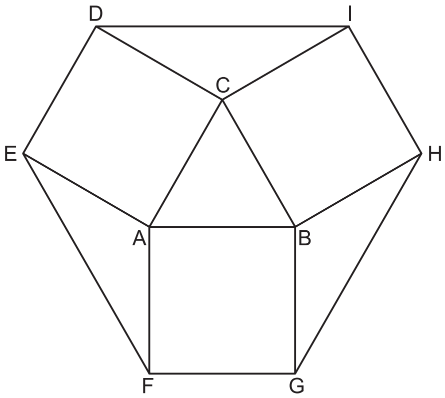
$$a_3 + a_1 = 2 \cdot a_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_8(8x) + \log_2 x = 2 \cdot \log_4(4x) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \log_8 8 + \log_8 x + \log_2 x = 2 \cdot (\log_4 4 + \log_4 x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 + \log_{2^3} x + \log_2 x = 2 \cdot (1 + \log_{2^2} x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{3} \cdot \log_2 x + \log_2 x = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \log_2 x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8$. Logo $a_1 + a_2 + a_3 =$
$= \log_2 8 + \log_4 32 + \log_8 64 =$
$= 3 + \log_{2^2} 2^5 + 2 = 5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$.

Questão 24

Na figura, o triângulo ABC é equilátero de lado 1, e $ACDE$, $AFGB$ e $BHIC$ são quadrados. A área do polígono $DEFGHI$ vale



a) $1 + \sqrt{3}$ b) $2 + \sqrt{3}$ c) $3 + \sqrt{3}$
d) $3 + 2\sqrt{3}$ e) $3 + 3\sqrt{3}$

alternativa C

A área do polígono DEFGHI é igual à soma das áreas dos quadrados congruentes ACDE, BCIH e ABGF, de lados iguais a 1, com as áreas dos triângulos congruentes DCI, EAF e GBH (dois lados iguais a 1 e ângulo entre eles igual a $360^o - 90^o - 90^o - 60^o = 120^o$), e ainda com a área do triângulo equilátero ABC, de lado 1. Portanto tal área vale

$$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \text{sen } 120^o + \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} =$$
$$= 3 + \sqrt{3}$$

Questão 25

Sejam x e y números reais positivos tais que $x + y = \pi/2$. Sabendo-se que $\text{sen}(y - x) = 1/3$, o valor de $\text{tg}^2 y - \text{tg}^2 x$ é igual a

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{8}$

alternativa A

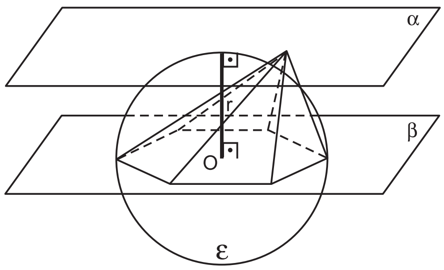
Como $x + y = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} - x$, $\text{sen}(y - x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{2}{3}$. Assim,
$\text{sen}^2 x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ e $\text{tg}^2 x = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$.
Logo $\text{tg}^2 y - \text{tg}^2 x = \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \text{tg}^2 x =$
$= \frac{1}{\text{tg}^2 x} - \text{tg}^2 x = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

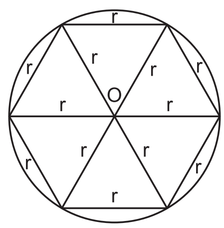
Questão 26

A esfera ε, de centro O e raio $r > 0$, é tangente ao plano α. O plano β é paralelo a α e contém O. Nessas condições, o volume da pirâmide que tem como base um hexágono regular inscrito na intersecção de ε com β e, como vértice, um ponto em α, é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}r^3}{4}$ b) $\frac{5\sqrt{3}r^3}{16}$ c) $\frac{3\sqrt{3}r^3}{8}$
d) $\frac{7\sqrt{3}r^3}{16}$ e) $\frac{\sqrt{3}r^3}{2}$

alternativa E





Como o plano β contém O, a base da pirâmide está inscrita em uma circunferência de raio r e é, portanto, um hexágono regular de lado r e área $6 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$. Além disso, sendo os planos α e β paralelos, a altura da pirâmide é a distância entre os dois planos, que é r.

Logo o volume da pirâmide é $\frac{1}{3} \cdot \frac{3r^2\sqrt{3}}{2} \cdot r = \frac{r^3\sqrt{3}}{2}$.

Questão 27

Um dado cúbico, não viciado, com faces numeradas de 1 a 6, é lançado três vezes. Em cada lançamento, anota-se o número obtido na face superior do dado, formando-se uma sequência (a, b, c). Qual é a probabilidade de que b seja sucessor de a ou que c seja sucessor de b?

a) $\frac{4}{27}$ b) $\frac{11}{54}$ c) $\frac{7}{27}$ d) $\frac{10}{27}$ e) $\frac{23}{54}$

alternativa C

Sendo A o conjunto das sequências em que b é sucessor de a, $A = \{(a; a+1; c), 1 \le a \le 5 \text{ e } 1 \le c \le 6\}$ e $n(A) = 5 \cdot 6 = 30$.
Sendo B o conjunto das sequências em que c é sucessor de b, $B = \{(a; b; b+1), 1 \le a \le 6 \text{ e } 1 \le b \le 5\}$ e $n(B) = 6 \cdot 5 = 30$.
As sequências que pertencem a $A \cap B$ *são:* (1; 2; 3), (2; 3; 4), (3; 4; 5) e (4; 5; 6). *Assim* $n(A \cap B) = 4$.
O número total de sequências (a; b; c) é $6^3 = 216$, *logo a probabilidade pedida é*

$$\frac{n(A \cup B)}{216} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{216} = \frac{30 + 30 - 4}{216} = \frac{7}{27}.$$

Questão 28

No plano cartesiano, os pontos (0, 3) e (–1, 0) pertencem à circunferência $\mathscr{C}$. Uma outra circunferência, de centro em (–1/2, 4), é tangente a $\mathscr{C}$ no ponto (0, 3). Então, o raio de $\mathscr{C}$ vale

a) $\frac{\sqrt{5}}{8}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ d) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ e) $\sqrt{5}$

alternativa E

Os centros das duas circunferências e o ponto de tangência são colineares. Assim, o centro da circunferência $\mathscr{C}$ *pertence à reta de equação* $y - 3 = \frac{4-3}{-\frac{1}{2} - 0}(x - 0) \Leftrightarrow y = -2x + 3$ *e pode ser representado por* $(a; -2a + 3)$, $a \in R$.
Como os pontos (0; 3) e (–1; 0) pertencem à circunferência $\mathscr{C}$, *temos:*

$$\sqrt{(a-0)^2 + (-2a+3-3)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (-2a+3-0)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 + 4a^2 = a^2 + 2a + 1 + 4a^2 - 12a + 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10a = 10 \Leftrightarrow a = 1$$

Portanto o centro tem coordenadas $(1; -2 \cdot 1 + 3) = (1; 1)$.
O raio de $\mathscr{C}$ *é* $\sqrt{(0-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$.

Questão 29

Seja $f(x) = a + 2^{bx+c}$, em que a, b e c são números reais. A imagem de f é a semirreta $]-1, \infty[$ e o gráfico de f intercepta os eixos coordenados nos pontos (1, 0) e (0, –3/4). Então, o produto abc vale

a) 4 b) 2 c) 0 d) –2 e) –4

alternativa A

Supondo que o domínio e o conjunto de chegada de f são o conjunto dos números reais, como a imagem da função 2^{bx+c} *é* $]0; +\infty[$, *então a imagem de* $f(x) = a + 2^{bx+c}$ *é* $]a; +\infty[$. *Assim,* $a = -1$.
Como o gráfico de f(x) intersecta os eixos coordenados nos pontos (1; 0) e $\left(0; -\frac{3}{4}\right)$, *temos:*

$$\left|\begin{array}{l} -1 + 2^{b+c} = 0 \\ -1 + 2^c = -\frac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2^{b+c} = 1 \\ 2^c = \frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} b + c = 0 \\ c = -2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} b = 2 \\ c = -2 \end{array}\right.$$

Portanto, $a \cdot b \cdot c = 4$.